រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

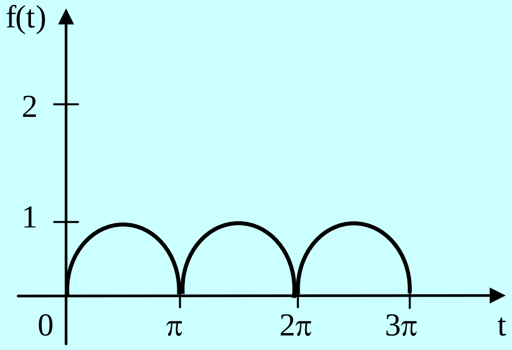
វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រ និង បច្ចេកវិទ្យា

ផ្នែកគណិតវិទ្យា និង ស្ថិតិ

បម្លែងឡាប្លាស

ជាមួយកម្មវិធី**Maple 9.5**

The Laplace Transform with Maple 9.5



Pierre Simon Laplace

រៀបរៀងដោយ : លោក ឃឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

ឆ្នាំ២០០៨

បម្លែងឡាប្លាស

ជាមួយកម្មវិធី**Maple 9.5**

The Laplace Transform with Maple 9.5

រៀបរៀងដោយ យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

បរិញ្ញាបត្រជាន់ខ្ពស់ ជំនាន់ទី១ ផ្នែកគណិតវិទ្យា និង ស្ថិតិ

និងជាមន្ត្រីនៅរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

អារម្ភកថា

សៀវភៅ *បម្លែងឡាប្លាស* នេះ រៀបរៀងឡើងដើម្បីទុកជាឯកសារជំនួយខ្លះៗដល់ការស្រាវ–ជ្រាវរបស់សាស្ត្រាចារ្យ និស្សិត និងអ្នកស្រាវជ្រាវមួយចំនួន ដែលមានបំណងសិក្សាមុខវិជ្ជាសៀគ្វីអគ្គិសនី សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញ និងប្រព័ន្ធលីនេអ៊ែរដែលកើតឡើងដំណាលគ្នា។

នាពេលបច្ចុប្បន្ននេះ វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រ និងបច្ចេកវិទ្យានៃរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជាពុំទាន់មានឯកសារនេះគ្រប់គ្រាន់ក្នុងការស្រាវជ្រាវ ជាពិសេសឯកសារជាខេមរភាសា។ ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងតម្រូវការចាំបាច់នេះ យើងខ្ញុំជាអ្នកស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិបានចងក្រងសៀវភៅ *បម្លែងឡាប្លាស* នេះឡើង។ សៀវភៅនេះមានមេរៀន និងឧទាហរណ៍ ដែលបានស្រាវជ្រាវពីសៀវភៅទំនើបៗមួយចំនួន ហើយយើងបានធ្វើកំណែលំហាត់មួយចំនួននិងដំណោះស្រាយតាមកម្មវិធី Maple 9.5 ថែមទៀត។

នៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំបានរក្សាទុកពាក្យបច្ចេកទេសជាភាសាអង់គ្លេសមួយចំនួននៅក្នុងវង់ក្រចក ដើម្បីជំនួយដល់អ្នកសិក្សា និងអ្នកស្រាវជ្រាវស្គាល់ពាក្យបច្ចេកទេសទាំងនេះ និងទុកជាការកែលំអ នៅពេលដែលមានការខ្វះខាតក្នុងការប្រែសម្រួល។

ខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះនិស្សិត និងមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ ដែលគាំទ្រដល់សៀវភៅ *បម្លែងឡាប្លាស* នេះ ហើយសូមស្វាគមន៍ជានិច្ចរាល់ការរិះគន់ស្ថាបនាដើម្បីឱ្យសៀវភៅនេះកាន់តែសុក្រិត្យថែមទៀត។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី២៤ ខែតុលា ឆ្នាំ២០០៨

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈរិដ្ឋា

មាតិកាមេរៀន

១– និយមន័យ និង លក្ខណៈទូទៅ
(Definition and General Properties)

បម្លែងឡាប្លាស ជាបម្លែងតែមួយគត់នៃថ្នាក់ប្រមាណវិធីដែលគេហៅថាជា “ បម្លែង ”។ គំនិតទូទៅនៃបម្លែងគឺធ្វើឱ្យមានសារៈប្រយោជន៍ គឺថាគូនៃអនុគមន៍ទាំងឡាយ ត្រូវតែមានប្រភេទខ្លះៗនៃភាពមានតែមួយនៅក្នុងគូនោះ។ ជាឧទាហរណ៍អនុគមន៍មួយអាចចាត់ជាគូនឹងអនុគមន៍ដេរីវេរបស់វា។ បម្លែងដេរីវេ ជាបម្លែងតែមួយគត់ក្នុងន័យដែលអនុគមន៍ពីរមានដេរីវេដូចគ្នា ដែលយ៉ាងច្រើនខុសគ្នាដោយចំនួនថេរ។ បម្លែងដោយស្គាល់ច្បាស់មួយទៀត គឺជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍មួយ។ យើងហៅថាជា អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ f(t) កំណត់ដោយ:

$$I\{f(t)\} = \int_0^x f(t)\,dt$$

បម្លែងឡាប្លាសនេះដែលគេអាចចាត់ទុកថាជាការពង្រីកគំនិតនៃបម្លែងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ គឺកំណត់ដូចខាងក្រោម:

<u>និយមន័យ</u>

បម្លែងឡាប្លាសនៃ f(t) បើវាមាន នោះវាតាងដោយ $\mathcal{L}\{f(t)\}$ និងកំណត់ដោយ:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (1)$$

ដែល s គឺជាចំនួនពិតដែលគេហៅថាជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបម្លែង។

យើងកត់សម្គាល់ថា បម្លែងឡាប្លាសលើអនុគមន៍ f(t) ហើយបម្លែងវាទៅជាអនុគមន៍ F(s) នៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ s។ ជាទូទៅ យើងតំណាងអនុគមន៍នៃ t ជាអក្សរតូចដូចជា f, g និង h ហើយតំណាងបម្លែងឡាប្លាសរបស់វារៀងគ្នាដោយអក្សរធំត្រូវគ្នា F, G និង H។ ដូចនេះ យើងសរសេរវាផងដែរជា

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad \text{ឬ} \quad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

សមីការដែលបានកំណត់ចំពោះបម្លែងឡាប្លាសនេះ គឺជាអាំងតេក្រាល Improper ពីព្រោះវាមានគោលលើមិនទាល់។ អាំងតេក្រាល Improper នៃប្រភេទនេះកំណត់ដោយ:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \qquad (2)$$

ដូច្នេះ អត្ថិភាពនៃបម្លែងឡាប្លាសនៃ f អាស្រ័យលើអត្ថិភាពនៃលីមីតនេះ។ យើងអាចរកបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ងាយៗជាច្រើនដោយផ្ទាល់ពីនិយមន័យ។

ឧទាហរណ៍ទី១ បង្ហាញថាបម្លែងឡាប្លាសនៃ $f(t) = 1$ កំណត់ដោយ:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad s > 0 \qquad (3)$$

ដំណោះស្រាយ

តាមនិយមន័យ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}[1]\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt$$

ដើម្បីកំណត់តម្លៃ បើសិនលីមីតនេះមាន យើងត្រូវតែពិនិត្យករណីបីដោយឡែកពីគ្នា ដែលទាក់ទងនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ s ។

1. ករណី $s < 0$ នោះ $-st > 0$ ចំពោះ $t > 0$ ហើយ

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^T = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s}\right] = \infty$$

ដែលមានន័យថាអាំងតេក្រាលនេះរីក។

2. ករណី $s = 0$ នោះអាំងតេក្រាលទៅជា:

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T dt = \lim_{T\to\infty} t\Big|_0^T = \lim_{T\to\infty} T = \infty \text{ ។}$$

3. ករណី $s > 0$ នោះ $-st < 0$ ចំពោះ $t > 0$ ហើយ

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី២ បង្ហាញថា $\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}, \quad s > k \qquad (4)$

ដំណោះស្រាយ

តាមនិយមន័យ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{kt}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-k)t}\,dt = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{-e^{-(s-k)t}}{s-k}\right]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-(s-k)T}}{s-k}+\frac{1}{s-k}\right]=\frac{1}{s-k} \quad \text{បើ } s>k \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៣ បង្ហាញថា $\mathcal{L}\{\sin kt\}=\dfrac{k}{s^2+k^2},\ s>0$ (5)

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បម្លែងឡាប្លាសនៃ $\sin kt$ កំណត់ដោយ:

$$\mathcal{L}\{\sin kt\}=\int_0^\infty e^{-st}\sin kt\,dt \text{ ។}$$

ពីរូបមន្តអាំងតេក្រាល $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ យើងអាចរកតម្លៃអាំងតេក្រាលខាងលើបាន:

$$\mathcal{L}\{\sin kt\}=\int_0^\infty e^{-st}\sin kt\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{-st}\left(-s\sin kt-k\cos kt\right)}{s^2+k^2}\right]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{-sT}\left(-s\sin kT-k\cos kT\right)}{s^2+k^2}+\frac{k}{s^2+k^2}\right]$$

$$= \frac{k}{s^2+k^2} \quad \text{បើ } s>0 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៤ បង្ហាញថា $\mathcal{L}\{t^n\}=\dfrac{n!}{s^{n+1}},\quad s>0$ (6)

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

តាមនិយមន័យ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{t^n\}=\int_0^\infty e^{-st}\,t^n\,dt \text{ ។}$$

យើងធ្វើបន្តដោយអនុវត្តលើរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក:

$$u=t^n \quad => \quad du=n\,t^{n-1}\,dt$$

និង $\quad dv=e^{-st}dt \quad => \quad v=-\dfrac{1}{s}e^{-st}$

ដូចនេះ

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\, t^n\, dt = \left[\frac{-t^n e^{-st}}{s}\right]_0^{\infty} + \frac{n}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{n-1}\, dt$$

ដោយតួទីមួយនៅអង្គខាងស្តាំស្មើនឹងសូន្យ ចំពោះ $n > 0$ និង $s > 0$ នោះគេបាន:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^n\, dt$$

$$= \frac{n}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{n-1} dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} \qquad (7)$$

ការអនុវត្តសមីការ (7) និងការជំនួស n ដោយ $n-1$ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n-1}{s}\mathcal{L}\{t^{n-2}\} \qquad (8)$$

ដោយបន្សំលទ្ធផលក្នុងសមីការ (7) និងសមីការ (8) នោះយើងអាចសរសេរជា:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n(n-1)}{s^2}\mathcal{L}\{t^{n-2}\} \text{ ។}$$

ការធ្វើអ៊ីតេរ៉ាស្យុងបន្តបន្ទាប់នៃដំណើរការនេះផ្តល់ឱ្យ

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{s^n}\mathcal{L}\{t^0\}$$

ប៉ុន្តែ $\mathcal{L}\{t^0\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ នោះគេបាន:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{បើ } s > 0 \text{ ។}$$

បម្លែងឡាប្លាស គឺជាការីលីនេអ៊ែរមួយ (Linear Operator) ដែលមានលក្ខណៈដូចនឹងដេរីវេ និងអាំងតេក្រាលដែរ មានន័យថា បើសិនជា $f_1(t)$ និង $f_2(t)$ មានបម្លែងឡាប្លាស ហើយបើ c_1 និង c_2 ជាចំនួនថេរ នោះគេបាន:

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} \qquad (9)$$

ដើម្បីប្រើបម្លែងឡាប្លាសនៅក្នុងដំណោះស្រាយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល វាសំខាន់គួរឱ្យមានបញ្ជីមួយដែលអាចអានបាន ឬតារាងនៃអនុគមន៍ងាយៗ និងបម្លែងរបស់វា។ តារាងទី១ ជាឧទាហរណ៍

មួយនៃតារាងបែបនេះ ដែលបានបង្ហាញពីលក្ខណៈលីនេអ៊ែរ និងរូបមន្តទូទៅចំពោះបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ដេរីវេទាំងឡាយដែលមានលក្ខណៈគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាច្រើន។

តារាងទី១ : បម្លែងឡាប្លាស

អនុគមន៍ f(t)	បម្លែងឡាប្លាស F(s)
1	$\frac{1}{s}$, s > 0
t^n, n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, s > 0
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$, s > k
$t^n e^{kt}$	$\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$, s > k
sin kt	$\frac{k}{s^2+k^2}$, s > 0
cos kt	$\frac{s}{s^2+k^2}$, s > 0
sinh kt	$\frac{k}{s^2-k^2}$, s > | k |
cosh kt	$\frac{s}{s^2-k^2}$, s > | k |

ឧទាហរណ៍ទី៥ រកតម្លៃ $\mathcal{L}\{3t+5e^{-2t}\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ពីរូបមន្តនៅក្នុងតារាងទី១ និងរូបមន្ត (9) យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{3t+5e^{-2t}\} = 3\mathcal{L}\{t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\}$$

$$= 3\left[\frac{1}{s^2}\right] + 5\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$= \frac{5s^2+3s+6}{s^2(s+2)} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៦ រកតម្លៃ $\mathcal{L}\{\cos^2 3t\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើសមភាព $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{\cos^2 3t\} = \mathcal{L}\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6t\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2 + 6^2}\right]$$

$$= \frac{s^2 + 18}{s(s^2 + 36)}$$ ។

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

២– ប្រភេទនៃអនុគមន៍មានបម្លែងឡាប្លាស
(Kinds of Functions have Laplace Transforms)

(a). ភាពជាប់ដោយដុំៗ (Piecewise Continuity)

ក្នុងផ្នែកមុន យើងបានបង្ហាញថា អនុគមន៍ងាយៗប្រាកដជាមានបម្លែងឡាប្លាស។ ឥឡូវនេះ យើងនិយាយអំពីបញ្ហាដ៏ទូលាយនៃអត្ថិភាពរបស់បម្លែងឡាប្លាស។ យើងនឹងបញ្ជាក់នូវល័ក្ខខ័ណ្ឌពីរទៅលើអនុគមន៍មួយ ដែលមានលក្ខណៈគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីធានាថាអនុគមន៍នោះមានបម្លែងឡាប្លាសមួយ។

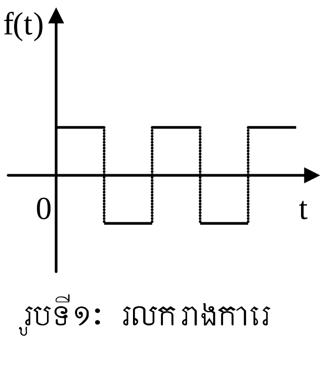
និយមន័យ

អនុគមន៍ f ហៅថាជា អនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើចន្លោះបិទ $a \le t \le b$ បើសិនជាចន្លោះនេះអាចចែកជាចំនួនរាប់អស់នៃចន្លោះរងបើក $c < t < d$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

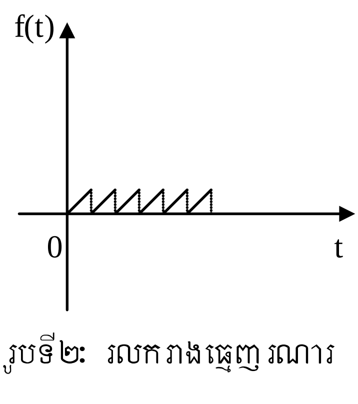
1. អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះរងនីមួយៗ $c < t < d$ ។

2. អនុគមន៍ f មានលីមីតកំណត់មួយ កាលណា t ខិតទៅរកចំណុចចុងនីមួយៗពីខាងក្នុងចន្លោះនោះ មានន័យថា $\lim_{t \to c^+} f(t)$ និង $\lim_{t \to d^-} f(t)$ មានលីមីត។

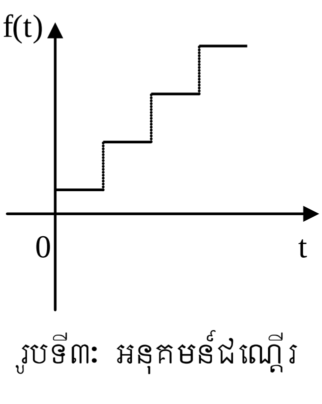
ល័ក្ខខ័ណ្ឌទីពីរ មានន័យថា អនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ f អាចមានភាពមិនជាប់រាប់អស់ ឬការលោត។ រូបទី១ បង្ហាញនូវអនុគមន៍ខ្លះៗ ដែលមានលក្ខណៈជាប់ដោយដុំៗ។ ដោយឡែកឡើយ គ្រប់អនុគមន៍ជាប់ ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗផងដែរ។ អនុគមន៍បែបដូចជា $f(t) = \frac{1}{t}$ មិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗទេលើចន្លោះបិទណាមួយ ដែលមានគល់តម្រុយ ពីព្រោះថាវាមានភាពដាច់មិនរាប់អស់នៅត្រង់ $t = 0$ ។



រូបទី១: រលករាងការេ



រូបទី២: រលករាងធ្មេញរណារ

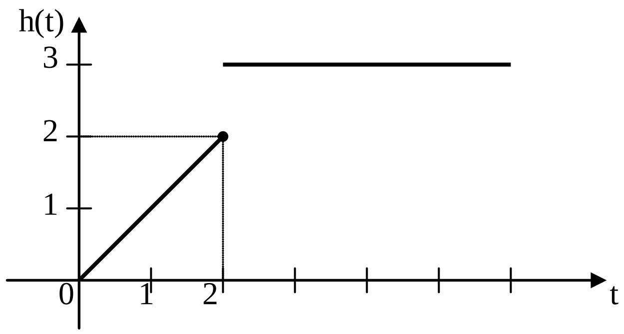


រូបទី៣: អនុគមន៍ជណ្ដើរ

ឧទាហរណ៍ទី៧ អនុគមន៍ h(t) បានបង្ហាញនៅរូបទី ៤ ហើយកំណត់ដោយ:

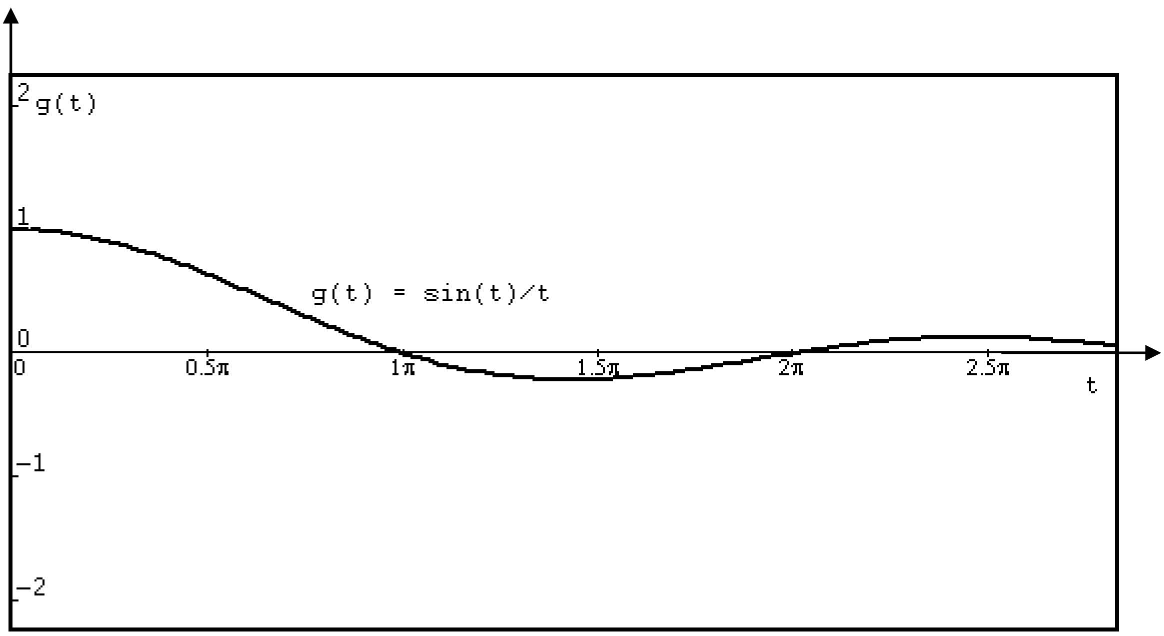
$$h(t)=\begin{cases} t\,, & 0\le t<2 \\ 3\,, & t>2 \end{cases}$$

មានភាពមិនជាប់ត្រង់ t = 2 ពីព្រោះ h(2) មិនកំណត់។ យ៉ាងណាក៏ដោយអនុគមន៍នេះ ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើចន្លោះ t ≥ 0 ពីព្រោះវាជាប់លើចន្លោះរងបើក 0 < t < 2 និង t > 2 ហើយ $\lim\limits_{t\to 2^-} h(t)=2$ និង $\lim\limits_{t\to 2^+} h(t)=3$ ។



រូបទី៤: អនុគមន៍ h(t)

ឧទាហរណ៍ទី៨ អនុគមន៍ $g(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ ជាអនុគមន៍មិនជាប់ត្រង់ t = 0 ។ សូមមើលរូបទី៥ និងពីការគណនា យើងដឹងថា: $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin t}{t}=1$ ។ ដូចនេះ វាជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗចំពោះ t ≥ 0 ។



រូបទី៥: អនុគមន៍ g(t)

ពីការគណនា យើងដឹងថាចំនួនរាប់អស់នៃភាពមិនជាប់រាប់អស់របស់អនុគមន៍អាំងតេក្រាល គឺមិនប៉ះពាល់ទៅនឹងអត្ថិភាពនៃអាំងតេក្រាលទេ។ ដូច្នេះ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<2\\ 3, & 2\le t\le 4\end{cases}$$

លើចន្លោះ [0, 1] ផ្តល់ឱ្យ

$$\int_0^4 f(t)\,dt=\int_0^2 1\,dt+\int_2^4 3\,dt=[t]_0^2+[3t]_2^4=8 \text{ ។}$$

ស្រដៀងគ្នាដែរភាពមិនជាប់នៃអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ មិនរារាំងយើងពីការរកបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ទេ។ បម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ f(t) មាន ដែលផ្តល់នូវ

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

ក៏មានដែរ។

ឧទាហរណ៍ទី៩ រកបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ $g(t)=\begin{cases}2t, & 0\le t<3\\ -1, & t>3\end{cases}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងប្រើនិយមន័យនៃ $\mathcal{L}\{g(t)\}$ ហើយបែងចែកអាំងតេក្រាលជាពីរផ្នែក មួយផ្នែកសម្រាប់ចន្លោះ $0\le t<3$ និងមួយផ្នែកទៀតសម្រាប់ចន្លោះ $t>3$ ។ ដូចនេះ

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=\int_0^3 e^{-st}[2t]\,dt+\int_3^\infty e^{-st}[-1]\,dt$$

$$=\left[-\frac{2te^{-st}}{s}-\frac{2e^{-st}}{s^2}\right]_0^3+\left[\frac{1}{s}e^{-st}\right]_3^\infty$$

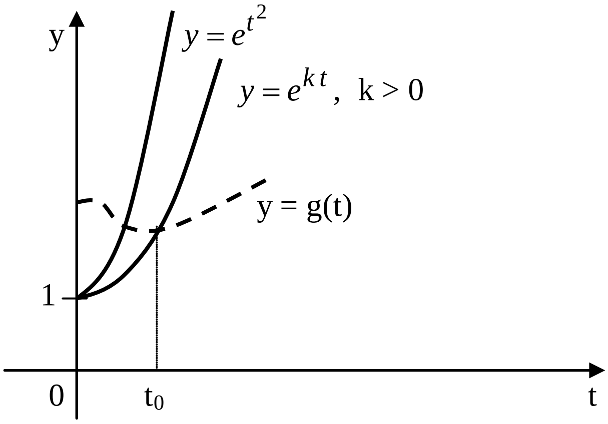
ដែលការគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ត្រូវបានគេប្រើដើម្បីរកតម្លៃអាំងតេក្រាលពី 0 ទៅ 3 ។ តម្លៃនៃ $\frac{1}{s}e^{-st}$ រួមរកសូន្យ នៅពេល $t\to\infty$ បើ $s>0$ ។ ដូច្នេះ

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=\left[-\frac{6}{s}e^{-3s}-\frac{2}{s^2}e^{-3s}\right]-\left[0-\frac{2}{s^2}\right]+\left[0-\frac{1}{s}e^{-3s}\right]$$

$$=\frac{2}{s^2}-\frac{2e^{-3s}}{s^2}-\frac{7e^{-3s}}{s} \quad \text{បើ } s>0 \text{ ។}$$

(b). លំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល (Exponential Order)

ក្នុងផ្នែកទី១ យើងបានបង្ហាញថា e^{kt} មានបម្លែងឡាប្លាសមួយចំពោះគ្រប់ $s > k$ ។ ក្រាបនៃ $y = e^{kt}$ បានបង្ហាញក្នុងរូបទី៦ ។ កត់សម្គាល់ពីក្រាបនេះថា e^{kt} ជាអនុគមន៍កើនឡើងយ៉ាងលឿន នៅពេលដែល t កើន។ ឥឡូវនេះ យើងពិនិត្យអនុគមន៍ g មួយទៀត ដែលបានបង្ហាញក្នុងរូបទី៦ ជាខ្សែកោងដាច់ៗខ័ណ្ឌដោយ e^{kt} ចំពោះគ្រប់ $t \geq t_0$ ។



រូបទី៦

បើ $|g|$ ជាអនុគមន៍ទាល់ដោយ e^{kt} ចំពោះគ្រប់ $t \geq t_0$ និង $\mathcal{L}\{e^{kt}\}$ មាន នោះ $\mathcal{L}\{g(t)\}$ ក៏មានដែរ។ ការពិចារណាអំពីទ្រឹស្តីនេះធ្វើឱ្យយើងបង្កើតនិយមន័យដូចតទៅ:

និយមន័យ

អនុគមន៍ f មានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល បើសិនវាមានចំនួនពិត a, M និង t_0 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$|f(t)| < M e^{at} \quad \text{ចំពោះ} \quad t > t_0 \text{ ។}$$

ការអត្ថាធិប្បាយ

(a). យើងបកស្រាយនូវនិយមន័យ ដែលមានន័យថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ f គឺស្ថិតនៅខាងក្រោមក្រាបនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $M e^{at}$ ចំពោះ $t > t_0$ ។

(b). ពីនិយមន័យ យើងទាញបានថា f មានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល លុះត្រាតែ ចំពោះគ្រប់អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល e^{at} គេបាន:

$$\lim_{t \to \infty} |f(t)| e^{-at} = 0 \text{ ។}$$

(c). រូបទី៦ បានបង្ហាញពីក្រាបនៃ $y = e^{t^2}$ ផងដែរ។ ក្រាបនេះ បង្ហាញថាវាមិនមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល e^{kt} ណាដែលទាល់ដោយ e^{t^2} ចំពោះ $t \geq 0$ នោះទេ ហើយដូច្នេះ e^{t^2} ជាអនុគមន៍មិនមានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

ឧទាហរណ៍ទី១០ បង្ហាញថា $f(t) = t^2$ ជាអនុគមន៍មានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

ដំណោះស្រាយ

យើងឃើញថា បើ a ជាចំនួនថេរធំជាងសូន្យ និងប្រើរូបមន្ត l'Hôpital នោះគេបាន:

$$\lim_{t\to\infty}\left|t^2\right|e^{-at} = \lim_{t\to\infty}\frac{2t}{a\,e^{at}} = \lim_{t\to\infty}\frac{2}{a^2\,e^{at}} = 0 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $f(t) = t^2$ ជាអនុគមន៍មានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

ទ្រឹស្តីបទទី១

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើ $[0, \infty)$ និងមានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល នោះបម្លែងឡាប្លាសមានចំពោះ $s > a$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ f ជាអនុគមន៍មានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល យើងឃើញថាវាមានចំនួនថេរ t_0 និង a ដែលចំពោះគ្រប់ M ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\left|e^{-at}\,f(t)\right| < M,\quad t \geq t_0 \text{ ។}$$

យើងគុណអង្គសងខាងនឹង $e^{-st}\,e^{at}$ យើងបាន:

$$\left|e^{-st}\,f(t)\right| < M\;e^{-st}\,e^{at} \text{ ។}$$

ដូច្នេះ $\int_0^\infty \left|e^{-st}\,f(t)\right| dt < \int_0^\infty M\,e^{-st}\,e^{at} dt = \left[-\frac{M\,e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^\infty$

ឬ $\int_0^\infty \left|e^{-st}\,f(t)\right| dt < \frac{M}{s-a}$ ចំពោះ $s > a$ ។

ដែលនាំឱ្យមានអត្ថិភាពនៃអាំងតេក្រាលImproper កំណត់បម្លែងឡាប្លាសនៃ f ។

ទ្រឹស្តីបទទី១ មិនផ្តល់នូវល័ក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់សម្រាប់អត្ថិភាពនៃបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ f ទេ គឺថាវាពុំមានន័យថា អនុគមន៍មួយត្រូវតែជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ និងមានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ដើម្បីបានបម្លែងឡាប្លាសនោះទេ។ ជាឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ $t^{-1/2}$ ដែលមិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើ $t \ge 0$ តែវាមានបម្លែងឡាប្លាសស្មើនឹង $(\pi / s)^{1/2}$ បើសិនជា $s > 0$។ ទោះបីយ៉ាងណា អនុគមន៍ប្រភេទបែបនេះ មានសារៈសំខាន់នៅក្នុងទ្រឹស្តីនៃបម្លែងឡាប្លាស យើងនឹងកំណត់ព្រំដែនការពិភាក្សារបស់យើងចំពោះអនុគមន៍ទាំងឡាយ ថាជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ និងមានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។ សម្រាយបញ្ជាក់នៃទ្រឹស្តីបទទី១ ផ្តល់ឱ្យយើងនូវកូរ៉ូលែរមួយគួរឱ្យចាប់អារម្មណ៍។

កូរ៉ូលែរទី១

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើ $[0, \infty)$ និងមានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ហើយ $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ នោះគេបាន: $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$ ។

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

យើងមាន:

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \le \int_0^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt \text{ ។}$$

ពីទ្រឹស្តីបទទី១ យើងបាន:

$$0 \le |F(s)| = |\mathcal{L}\{f(t)\}| \le \frac{M}{s-a}$$

ដែលបង្ហាញថា $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$ ។

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

៣– បម្លែងឡាប្លាសច្រាស
(The Inverse Laplace Transform)

ក្នុងផ្នែកទី១ យើងបានបង្ហាញនូវរបៀបរកបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ f(t) ។ វាសំខាន់ផងដែរ ដើម្បីឱ្យគេមានលទ្ធភាពត្រឡប់ដំណើរការនេះ និងសង់អនុគមន៍ f(t) ឡើងវិញ ដែលជារបស់បម្លែងឡាប្លាស F(s) ដែលគេបានឱ្យ។

និយមន័យ

បើគេមានអនុគមន៍ f(t) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ នោះគេបាន f(t) ហៅថាជា អនុគមន៍បម្លែងឡាប្លាសច្រាសនៃ F(s) ។ យើងតាងបម្លែងឡាប្លាសច្រាសដោយ $\mathcal{L}^{-1}$ និងសរសេរជា:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \qquad (10)$$

ការកំណត់នៃបម្លែងឡាប្លាសច្រាសមួយ គឺមិនផ្ទាល់ដាងការរកបម្លែងឡាប្លាសទេ គ្រាន់តែជាការគណនាតាមការរកព្រីមីទីវមួយ គឺមិនផ្ទាល់ដាងតាមការរកដេរីវេមួយនោះទេ។ តាមលក្ខណៈមូល–ដ្ឋានដើម្បីរកបម្លែងឡាប្លាសច្រាស លោកអ្នកត្រូវតែប្រើរូបមន្តទាំងឡាយដែលបានស្គាល់នៅក្នុងតារាងទី១ មុន។

ឧទាហរណ៍ទី១១ រកតម្លៃ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2}\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយយើងដឹងថា $\mathcal{L}\{e^{-2t}\}=\frac{1}{s+2}$ នោះគេបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2}\}=e^{-2t} \text{ ។}$$

ពីទម្រង់ការ ដើម្បីរកបម្លែងឡាប្លាសច្រាស លោកអ្នកត្រូវតែរៀនប្រើតារាងទី១ តាមលក្ខណៈបញ្ច្រាស។ យ៉ាងណាក៏ដោយ នៅក្នុងករណីជាច្រើន បម្លែងដែលគេបានឱ្យនឹងមិនមែនជាទម្រង់មួយដែលអនុញ្ញាតឱ្យប្រើតារាងនេះដោយផ្ទាល់នោះទេ ដូច្នេះ F(s) ដែលគេបានឱ្យនឹងត្រូវតែរៀបចំតាមលក្ខណៈពីជគណិតឱ្យទៅជាទម្រង់មួយដែលអាចរកបាននៅក្នុងតារាងនេះ។ គោលការណ៍សំខាន់ក្នុងការពិភាក្សានេះ គឺបានបង្ហាញការពិតថា បម្លែងឡាប្លាសច្រាសមានលក្ខណៈលីនេអ៊ែរដូចខាងក្រោម:

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\}=c_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}+c_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} \qquad (11)$$

ដែល c_1 និង c_2 ជាចំនួនថេរណាមួយ។ សុពលភាពនៃលក្ខណៈធ្វើតាមពីនិយមន័យនៃ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ និងលក្ខណៈលីនេអ៊ែរដែលត្រូវគ្នាចំពោះ F(s) ។

ឧទាហរណ៍ទី១២ រកតម្លៃ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s+1}{s^2+4}\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

តាមលក្ខណៈលីនេអ៊ែរ ជាដំបូងយើងសរសេរ

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s+1}{s^2+4}\}=2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}+\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\}$$ ។

ពីតារាងទី១ យើងមាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}=\cos 2t$$

និង $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\}=\frac{1}{2}\sin 2t$$

ដូចនេះ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s+1}{s^2+4}\}=2\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t$ ។

ក្នុងករណីជាច្រើន បម្លែងដែលគេឱ្យ គឺជាអនុគមន៍សនិទាន Proper នៃ s ដែលនៅក្នុងតារាងទី ១ អាចប្រើបានតែមួយប៉ុណ្ណោះ បន្ទាប់ពីបម្លែងដែលគេឱ្យនេះត្រូវបានគេបំបែកវាទៅជាប្រភាគដោយផ្នែករួចមក។ វិធីបន្ថែមខ្លះទៀតសម្រាប់ការរៀបចំ F(s) គឺគ្របដណ្តប់នៅក្នុងផ្នែកក្រោយទៀត ប៉ុន្តែពេលឥឡូវនេះ យើងយកចិត្តទុកដាក់លើការប្រើប្រភាគដោយផ្នែកសិន។

ឧទាហរណ៍ទី១៣ រកតម្លៃ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+5}{s^2-2s-3}\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កន្សោមភាគបែងអាចដាក់ជាផលគុណកត្តាជា

$$s^2-2s-3=(s-3)(s+1)$$ ។

ដូចនេះ ប្រភាគដោយផ្នែកគឺ:

$$\frac{s+5}{(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}$$

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរដែលត្រូវកំណត់។ ពីការតម្រូវភាគបែងឱ្យដូចគ្នា គេទទួលបាន:

$$s + 5 = A (s + 1) + B (s - 3) \text{ ។}$$

– បើ $s = 3$ យើងបាន $8 = 4A$ => $A = 2$ ។

– បើ $s = -1$ យើងបាន $4 = -4B$ => $B = -1$ ។

យើងបាន $\frac{s+5}{(s-3)(s+1)}=\frac{2}{s-3}-\frac{1}{s+1}$ ។

ដូចនេះ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+5}{s^2-2s-3}\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s-3}\}-\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}$

$$=2e^{3t}-e^{-t} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី១៤ រកតម្លៃ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2}{(s+1)^3}\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ប្រភាគដោយផ្នែកគឺ:

$$\frac{s^2}{(s+1)^3}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{(s+1)^3}$$

ដែល A, B និង C ជាចំនួនថេរដែលត្រូវកំណត់។ ពីការតម្រូវភាគបែងឱ្យដូចគ្នា គេទទួលបាន:

$$s^2 = A(s+1)^2 + B(s+1) + C$$

$$= As^2 + (2A + B)s + (A + B + C) \text{ ។}$$

ដោយផ្ទឹមមេគុណពហុធាលើអង្គទាំងសងខាង យើងបាន:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ 2A + B &= 0 \\ A + B + C &= 0 \end{aligned}$$

ដំណោះស្រាយនៃប្រព័ន្ធសមីការនេះ នោះគេបានចម្លើយ $A = 1$, $B = -2$ និង $C = 1$ ។ នាំឱ្យប្រភាគដោយផ្នែកខាងលើទៅជា:

$$\frac{s^2}{(s+1)^3}=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}$$ ។

ដូចនេះ $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2}{(s+1)^3}\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}-\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s+1)^2}\}+\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^3}\}$$

$$= e^{-t}-2te^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}$$

$$=\left(1-2t+\frac{1}{2}t^2\right)e^{-t}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៥ រកតម្លៃ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{9s+14}{(s-2)(s^2+4)}\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ប្រភាគដោយផ្នែកគឺ:

$$\frac{9s+14}{(s-2)(s^2+4)}=\frac{A}{s-2}+\frac{Bs+C}{s^2+4}$$

ដែល A, B និង C ជាចំនួនថេរដែលត្រូវកំណត់។ ពីការតម្រូវភាគបែងឱ្យដូចគ្នា គេទទួលបាន:

$$9s + 14 = A(s^2 + 4) + (Bs + C)(s - 2)$$

$$= (A + B)s^2 + (-2B + C)s + (4A - 2C)$$ ។

ដោយផ្ទឹមមេគុណពហុធាលើអង្គទាំងសងខាង យើងបាន:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2A + C &= 9 \\ 4A - 2C &= 14 \end{aligned}$$

ដំណោះស្រាយនៃប្រព័ន្ធសមីការនេះ នោះគេបានចម្លើយ $A = 4$, $B = -4$ និង $C = 1$។ នាំឱ្យប្រភាគដោយផ្នែកខាងលើទៅជា:

$$\frac{9s+14}{(s-2)(s^2+4)}=\frac{4}{s-2}+\frac{-4s+1}{s^2+4}$$ ។

ដូចនេះ $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{9s+1\quad 4}{(s-2)(s^2+4)}\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4}{s-2}\}+\mathcal{L}^{-1}\{\frac{-4s+1}{s^2+4}\}$$

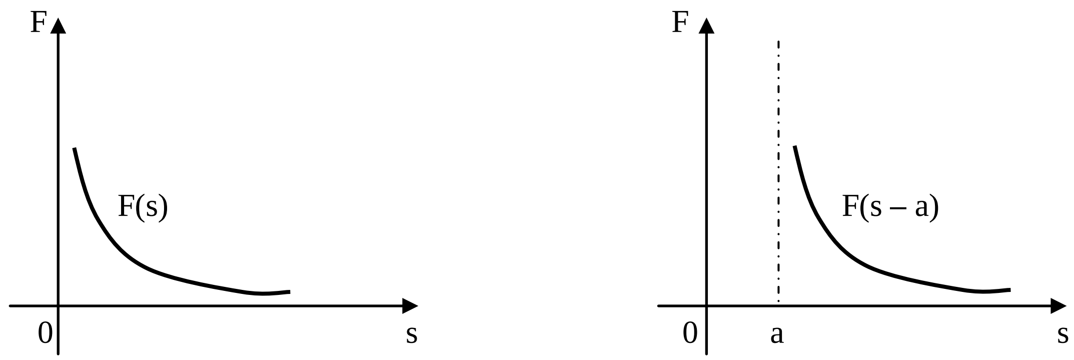
$$= 4\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} - 4\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\}$$

$$= 4e^{2t} - 4\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$$ ។

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

៤–   ទ្រឹស្តីបទរំកិលទី ១
(The First Shifting Theorem)

លក្ខណៈមួយក្នុងចំណោមលក្ខណៈដ៏មានប្រយោជន៍ជាច្រើននៃបម្លែងឡាប្លាស គឺមាននៅក្នុងទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមដែលជាទ្រឹស្តីបទមួយក្នុងចំណោមទ្រឹស្តីបទរំកិលពីរនៅក្នុងទ្រឹស្តីនៃបម្លែងឡាប្លាស។ នៅពេលដែលយើងនិយាយអំពីការរំកិលអនុគមន៍មួយ យើងមានបំណងថា ក្រាបវាផ្លាស់ទីទៅខាងឆ្វេង ឬស្តាំដោយចំនួនឯកតាជាក់លាក់។ ជាឧទាហរណ៍ ក្រាបនៃ F(s) បានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី៧ (a) និងក្រាបមួយទៀតរំកិល a ឯកតាទៅខាងស្តាំ គឺត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី៧ (b)។ អនុគមន៍រំកិលនេះតាងដោយ F(s – a) ។



(a) **(b)**

រូបទី៧

ទ្រឹស្តីបទទី២ ទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១

តាង $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ នោះគេបាន $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$ (12)

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមនិយមន័យនៃ $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$ យើងសរសេរ

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\left[e^{at}f(t)\right]dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}f(t)\,dt=F(s-a)$$ ពិត។

ឧទាហរណ៍ទី១៦ ប្រើទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ ដើម្បីកំណត់បម្លែងឡាប្លាសនៃ **(a).** $e^t t^2$ និង **(b).** $e^{3t} \sin t$ ។

ដំណោះស្រាយ

(a). ដោយ $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$ តាមទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ យើងបាន: $\mathcal{L}\{e^t t^2\} = \frac{2}{(s-1)^3}$ ។

(b). ដោយ $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ តាមទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ យើងបាន: $\mathcal{L}\{e^{3t} \sin t\} = \frac{1}{(s-3)^2+1}$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៧ ប្រើទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ ដើម្បីកំណត់នៃ $\mathcal{L}\{e^{-t} g(t)\}$ ដែល

$$g(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 3 \\ -1, & t \ge 3 \end{cases} \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

បម្លែងឡាប្លាសនៃ g(t) ត្រូវបានរកឃើញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី៩ នៃផ្នែកទី២គឺ:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{2}{s^2} - \frac{2e^{-3s}}{s^2} - \frac{7e^{-3s}}{s} \quad \text{បើ } s > 0 \text{ ។}$$

ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{e^{-t} g(t)\} = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2e^{-3(s+1)}}{(s+1)^2} - \frac{7e^{-3(s+1)}}{s+1} \text{ ។}$$

ទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ អាចមានតម្លៃផងដែរក្នុងការរកបម្លែងឡាប្លាសច្រាស។ ពីព្រោះថាទ្រឹស្តីបទមួយចំពោះបម្លែងច្រាស វាមានទម្រង់

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t) \qquad (13)$$

ឧទាហរណ៍ទី១៨ រកតម្លៃ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{(s-5)^2+9}\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+9}$ នោះគេបាន: $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s^2+9}\} = \sin 3t$ ។

បើគេយក s ជំនួសដោយ s – 5 និងតាមរូបមន្ត (13) យើងបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{(s-5)^2+9}\} = e^{5t}\ \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s^2+9}\} = e^{5t}\sin 3t$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី១៩ រកតម្លៃ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+4s+10}\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $s^2 + 4s + 10 = s^2 + 4s + 4 + 6$

$= (s + 2)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2$ ។

ដូចនេះ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+4s+10}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}\}$

$= \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-2t}\sin\sqrt{6}\,t$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២០ រកតម្លៃ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+6s+13}\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $s^2 + 6s + 13 = s^2 + 6s + 9 + 4$

$= (s + 3)^2 + 4$ ។

ដូចនេះ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+6s+13}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s+3)^2+4}\}$

$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{(s+3)-3}{(s+3)^2+4}\}$

$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{(s+3)^2+4}\}$

$= e^{-3t}\cos 2t - \frac{3}{2}e^{-3t}\sin 2t$ ។

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

៥– បម្លែងនៃដេរីវេ និង អាំងតេក្រាល
(Transforms of Derivatives and Integrals)

បម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ដេរីវេមានអត្ថិភាពលើល័ក្ខខ័ណ្ឌប្រាកដទាំងឡាយចំពោះ f និង f' ហើយត្រូវគ្នាទៅនឹងប្រមាណវិធីពីជគណិតនៃប្រមាណវិធីគុណរបស់បម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ទៅនឹង s ។ វាជាលក្ខណៈដែលបង្កើតបម្លែងឡាប្លាសដ៏មានប្រយោជន៍ក្នុងការដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលចំពោះ $t \geq 0$ ហើយបើ f' ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗចំពោះ $t \geq 0$ នោះគេបានបម្លែងឡាប្លាសនៃ f' មាន និងកំណត់ដោយ:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)\, dt ។$$

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកជាមួយ

$$u = e^{-st} \quad \Rightarrow \quad du = -s\, e^{-st}\, dt$$

និង $\quad dv = f'(t)dt \quad \Rightarrow \quad v = f(t)$

យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \Big[f(t)e^{-st}\Big]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

ឬ $\quad \mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\,\mathcal{L}\{f(t)\}$ ពីព្រោះ $f(t)$ មានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង $s > 0$

ឬ $\quad \mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \qquad (14)$

រូបមន្តចំពោះ $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ អាចរកឃើញដោយតាង $g(t) = f'(t)$ ។ គេទាញបាន : $g'(t) = f''(t)$ និង

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$$

$$= s\,\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$

$$= s\big[s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\big] - f'(0) ។$$

ការពន្លាតកន្សោមចុងក្រោយផ្តល់នូវរូបមន្ត

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\} - s\,f(0) - f'(0) \qquad (15)$$

ករណីទូទៅចំពោះបម្លែងឡាប្លាសនៃដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍មួយ ត្រូវបានគេឱ្យនៅក្នុងទ្រឹស្តីបទដូចតទៅ:

ទ្រឹស្តីបទទី៣

បើ $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលចំពោះ $t \geq 0$ ហើយបើ $f^{(n)}(t)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗចំពោះ $t \geq 0$ នោះគេបាន:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad (16)$$

ឧទាហរណ៍ទី២១ រកតម្លៃ $\mathcal{L}\{\sin kt\}$ ដោយប្រើរូបមន្តចំពោះបម្លែងឡាប្លាសនៃ f'' ។

ដំណោះស្រាយ

យើងតាង $f(t) = \sin kt$ នោះគេបាន:

$f'(t) = k\cos kt$, $f''(t) = -k^2 \sin kt$, $f(0) = 0$ និង $f'(0) = k$ ។

ដោយប្រើសមីការ (15) យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \text{ ។}$$

ការជំនួសកន្សោម $f(t)$ និង $f''(t)$ ចូលក្នុងសមីការនេះ យើងទទួលបាន:

$$\mathcal{L}\{-k^2 \sin kt\} = s^2 \mathcal{L}\{\sin kt\} - k \text{ ។}$$

ក្នុងទីបញ្ចប់ដោយដោះស្រាយរក $\mathcal{L}\{\sin kt\}$ ផ្តល់ឱ្យ

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

ដែលមាននៅក្នុងតារាងទី១ រួចមកហើយ។

ឧទាហរណ៍ទី២២ រកតម្លៃ $\mathcal{L}\{t\}$ ដោយប្រើរូបមន្តចំពោះបម្លែងឡាប្លាសនៃ f' ។

ដំណោះស្រាយ

យើងតាង $f(t) = t$ នោះគេបាន : $f'(t) = 1$ និង $f(0) = 0$ ។

ដោយប្រើសមីការ (14) យើងបាន:

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - 0$ ។

ការជំនួសកន្សោម f(t) និង f '(t) ចូលក្នុងសមីការនេះ យើងទទួលបាន:

$\mathcal{L}\{1\} = s\,\mathcal{L}\{t\}$ ។

ដោយ $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ យើងបាន:

$\frac{1}{s} = s\,\mathcal{L}\{t\}$ ។

ដូចនេះ $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៣អាចត្រូវបានគេប្រើដើម្បីបង្កើតរូបមន្តមួយ ចំពោះបម្លែងឡាប្លាសនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ មានន័យថា យើងអាចរករូបមន្តមួយចំពោះ $\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)\,dx\}$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី៤

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ និងមានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលចំពោះ $t \ge 0$ នោះគេបាន:

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)\,dx\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}F(s) \qquad (17)$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាង $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ នោះគេបាន: $g'(t) = f(t)$ និង $g(0) = 0$ ។

ម្យ៉ាងទៀត g(t) មានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុវត្តលើទ្រឹស្តីបទទី៣ យើងបាន:

$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$

ឬ $\mathcal{L}\{f(t)\} = s\,\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)dx\}$ ។

ដូច្នេះ $\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)\,dx\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$ ពិត។

យើងឃើញថា បម្លែងឡាប្លាសនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ត្រូវគ្នាទៅនឹងប្រមាណវិធីចែករវាងបម្លែង f និង s ។ ទាញចេញពីទ្រឹស្តីបទទី៤ យើងបានកូរ៉ូលែរទី២ខាងក្រោម:

កូរ៉ូលែរទី២

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}F(s)\} = \int_0^t f(x)\,dx \qquad (18)$$

ឧទាហរណ៍ទី២៣ គេឱ្យ $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s\left(s^2+4\right)}$ ចូរកំណត់ f(t) ដោយប្រើរូបមន្ត (18) ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន $\mathcal{L}\{\dfrac{1}{2}\sin 2t\} = \dfrac{1}{s^2+4}$

ហើយ

$$\int_0^t \frac{\sin 2x}{2}\,dx = \left[-\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^t = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2t}{4}$$ ។

ឥឡូវនេះ ការសរសេរ f(t) ជាបម្លែងច្រាសមួយ យើងបាន៖

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+4}\} = \int_0^t \frac{\sin 2x}{2}\,dx = \frac{1-\cos 2t}{4}$$ ។

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

៦ – បញ្ហាតម្លៃដើម
(Initial-Value Problems)

បម្លែងឡាប្លាសនៃដេរីវេរបស់អនុគមន៍មួយមានល័ក្ខខ័ណ្ឌ ដែលត្រូវការតម្លៃនៃអនុគមន៍ និងដេរីវេវាត្រង់ $t = 0$។ ដោយសារលក្ខណៈនេះ បម្លែងឡាប្លាសសមគ្នាតែម្យ៉ាងគត់នឹងបញ្ហាតម្លៃដើមដែលជាប់ទាក់ទងនឹងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ ដែលមានមេគុណជាចំនួនថេរ។ គោលបំណងនៅក្នុងផ្នែកនេះ គឺចង់បង្ហាញនូវរបៀបបម្លែងឡាប្លាសដែលគេបានប្រើដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម។

ឧទាហរណ៍ទី២៤ ចូរប្រើបម្លែងឡាប្លាសដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម

$$y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1$$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ការធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងសងខាងរបស់សមីការដែលឱ្យ បានផ្តល់ឱ្យ

$\mathcal{L}\{y'+2y\} = \mathcal{L}\{0\}$ ។

តាង $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ និងប្រើរូបមន្ត (14) យើងបាន:

$$s\,Y(s) - 1 + 2\,Y(s) = 0$$

នាំឱ្យ $Y(s) = \dfrac{1}{s+2}$ ។

អនុគមន៍ $y(t)$ ត្រូវបានគេរកឃើញដោយការធ្វើបម្លែងច្រាសនៃសមីការខាងលើនេះ។

ដូចនេះ $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{1}{s+2}\} = e^{-2t}$ ជាចម្លើយសមីការដែលចង់បាន។

វិធីបម្លែងឡាប្លាសបានរៀបរាប់នៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី២៤ គឺជាតួយ៉ាងមួយ។ យើងសង្ខេបនូវទម្រង់បម្លែងឡាប្លាសសម្រាប់ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរដូចតទៅ:

1. ធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងពីររបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលបានឱ្យដោយប្រើលក្ខណៈលីនេអ៊ែរនៃបម្លែង។
2. ដោះស្រាយសមីការដែលបានបម្លែងចំពោះបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ចម្លើយ។
3. រកបម្លែងច្រាសនៃកន្សោម $F(s)$ ដែលគេបានរកឃើញនៅជំហានទី២។

កត់សម្គាល់ថា នៅពេលវិធីបម្លែងឡាប្លាសត្រូវបានគេប្រើ នោះល័ក្ខខ័ណ្ឌដើមត្រង់ $t = 0$ ត្រូវបានបញ្ចូលដោយស្វ័យប្រវត្តិ។ ជាងនេះទៀត ចម្លើយដែលទទួលបាន គឺជាចម្លើយពិសេសដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងល័ក្ខខ័ណ្ឌដើម។ ដូចនេះ ផលប្រយោជន៍មួយនៃវិធីបម្លែងឡាប្លាស គឺថាវាបានបង្ហាញនូវប្រសិទ្ធភាពនៃល័ក្ខខ័ណ្ឌដើមលើអនុគមន៍ចម្លើយ។

ឧទាហរណ៍ទី២៥ ដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម

$$y' + 3y = 3, \quad y(0) = 0$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងសងខាងរបស់សមីការ និងតាង $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ យើងបាន:

$$\left[s\,Y(s) - 0\right] + 3Y(s) = \frac{3}{s}$$ ។

ការដោះស្រាយចំពោះ $Y(s)$ ផ្តល់ឱ្យ

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+3)}$$ ។

ការពន្លាតជាប្រភាគដោយផ្នែកនៃអង្គខាងស្តាំ យើងបាន:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}$$ ។

ដូច្នេះ ចម្លើយរបស់សមីការគឺ:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+3}\} = 1 - e^{-3t}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី២៦ ដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម

$$\ddot{x} + 4x = e^{-t}, \quad x(0) = 2, \quad \ddot{x}(0) = 1$$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ យើងបាន:

$$\left[s^2\,X(s) - 2s - 1\right] + 4X(s) = \frac{1}{s+1}$$ ។

ការដោះស្រាយចំពោះ $X(s)$ ផ្តល់ឱ្យ

$$X(s) = \frac{2s^2 + 3s + 2}{(s+1)(s^2+4)} \text{ ។}$$

យើងអាចសរសេរកន្សោមខាងលើ ជាប្រភាគដោយផ្នែក

$$X(s) = \frac{\frac{1}{5}}{s+1} + \frac{\frac{9}{5}s + \frac{6}{5}}{s^2+4} \text{ ។}$$

ដោយប្រើលក្ខណៈបម្លែងច្រាស យើងបានចម្លើយនៃសមីការគឺ:

$$x(t) = \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{9}{5}\cos 2t + \frac{3}{5}\sin 2t \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី២៧ ដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម

$$y'' + 2y' + 5y = 10, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោយធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងពីររបស់សមីការដែលឱ្យ និងតាង $Y = \mathcal{L}\{y\}$ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{10\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[s^2 Y - s\right] + 2[sY - 1] + 5Y = \frac{10}{s} \text{ ។}$$

ការដោះស្រាយរក Y ផ្តល់ឱ្យ

$$Y = \frac{s^2 + 2s + 10}{s(s^2 + 2s + 5)} \text{ ។}$$

ប្រភាគដោយផ្នែកចំពោះអនុគមន៍នេះគឺ:

$$\frac{s^2 + 2s + 10}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}$$

$$\Leftrightarrow \quad s^2 + 2s + 10 = A(s^2 + 2s + 5) + s(Bs + C)$$

$$= (A + B)s^2 + (2A + C)s + 5A$$

ដោយផ្ទឹមមេគុណនៃពហុធាខាងលើ យើងទទួលបានៈ

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A + C &= 2 \\ 5A &= 10 \end{aligned}$$

ការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះចំពោះ A, B និង C ផ្តល់ឱ្យ $A = 2, B = -1$ និង $C = -2$ ។

ដូចនេះបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ចម្លើយ អាចសរសេរជា

$$Y = \frac{2}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

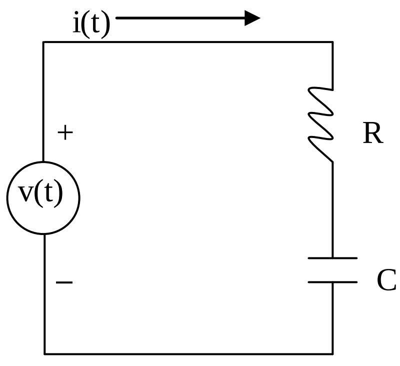
$$= \frac{2}{s} - \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+4}$$

$$= \frac{2}{s} - \frac{(s+1)}{(s+1)^2+4} - \frac{1}{(s+1)^2+4} \text{ ។}$$

ទីបញ្ចប់ ដោយធ្វើបម្លែងឡាប្លាសច្រាស នោះគេបានអនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការគឺៈ

$$y = 2 - e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី២៨ កំណត់ចរន្តអគ្គិសនីនៅក្នុងបង្គុំជាស៊េរីនៃសៀគ្វី RC បើសិនតង់ស្យុងចរន្តគឺ $v = e^{-t}$ ចំពោះ $t \geq 0$ ហើយបន្ទុកដើមលើកុងដង់សាទ័រស្មើសូន្យ (សូមមើលរូបទី៨)។



រូបទី៨

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

តាមច្បាប់ Kirchhoff យើងបានសមីការសៀគ្វីមានទម្រង់

$$R\,i+\frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx = e^{-t},\quad q(0)=0$$ ។

ដោយធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងពីររបស់សមីការ និងតាងបម្លែងនៃចរន្តស្មើនឹង I(s) យើងបាន៖

$$R\,I(s)+\frac{1}{Cs}I(S)=\frac{1}{s+1}$$

នាំឱ្យ $$I(s)=\frac{sC}{(RCs+1)(S+1)}=\frac{1}{R}\cdot\frac{s}{(s+1/RC)(s+1)}$$ ។

សរសេរប្រភាគខាងលើទៅជាប្រភាគដោយផ្នែក៖

$$I(s)=\frac{-1}{R(RC-1)}\left[\frac{1}{s+1/RC}\right]+\frac{C}{RC-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$ ។

នៅទីបញ្ចប់ ដោយធ្វើបម្លែងឡាប្លាសច្រាស យើងបាន៖

$$i(s)=\frac{-1}{R(RC-1)}e^{-t/RC}+\frac{C}{RC-1}e^{-t}$$ ។

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

៧ – ដេរីវេ នៃបម្លែងឡាប្លាស
(Derivatives of Laplace Transforms)

បើ f(t) ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ និងមានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលចំពោះ $t \geq 0$ វាអាចបង្ហាញថា អាំងតេក្រាលបម្លែងឡាប្លាសអាចធ្វើដេរីវេធៀបនឹង s តាមការគណនាដេរីវេក្រោមល័ក្ខខ័ណ្ឌសញ្ញាអាំងតេក្រាល។ មានន័យថា បើ

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

នោះ

$$\frac{d}{ds} F(s) = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} -t\, e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st} [-t\, f(t)]\, dt$$

$$= \mathcal{L}\{-t\, f(t)\} \text{ ។}$$

ស្រដៀងគ្នាដែរ គេបាន:

$$\frac{d^2}{ds^2} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} [(-t)\, f(t)]\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} [(-t)^2\, f(t)]\, dt$$

$$= \mathcal{L}\{(-t)^2\, f(t)\} \text{ ។}$$

ការសង្កេតមើលគំរូចំពោះករណីទាំងពីរនេះ យើងបង្ហាញករណីទូទៅនៅក្នុងទ្រឹស្តីបទដូចតទៅ:

ទ្រឹស្តីបទទី៥

បើ $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះគេបានដេរីវេទី n នៃ F(s) កំណត់ដោយ:

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n\, f(t)\} \qquad (19)$$

ឧទាហរណ៍ទី២៩ ប្រើទ្រឹស្តីបទទី៥ ដើម្បីរកតម្លៃ $\mathcal{L}\{t \sin kt\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងដឹងថា $\mathcal{L}\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

ដូច្នេះពីសមីការ (19) យើងបាន:

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right] = \mathcal{L}\{(-t)\sin kt\}$$

ឬ $$\mathcal{L}\{t\sin kt\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right] = \frac{2ks}{\left(s^2+k^2\right)^2}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣0 រកតម្លៃ $\mathcal{L}\{t^2\sin kt\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ពីឧទាហរណ៍ទី២៩ យើងដឹងថា $\mathcal{L}\{t\sin kt\} = \dfrac{2ks}{\left(s^2+k^2\right)^2}$ ។

យើងធ្វើតដូចតទៅ:

$$\mathcal{L}\{t^2\sin kt\} = \mathcal{L}\{(-t)\,(t\sin kt)\}$$

$$= -\frac{d}{ds}\left[\frac{2ks}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right]$$

$$= -\frac{\left(s^2+k^2\right)^2 2k - 8ks^2\left(s^2+k^2\right)}{\left(s^2+k^2\right)^4}$$

$$= \frac{2k\left(3s^2-k^2\right)}{\left(s^2+k^2\right)^3}$$ ។

ខណៈដែលមានវិធីងាយមួយនៃការរកបម្លែងឡាប្លាសច្រាស យើងត្រូវពិនិត្យទ្រឹស្តីបទទី៥ ចំពោះ n = 1 ។ មានន័យថា

$$\mathcal{L}\{-t\,f(t)\} = \frac{d}{ds}F(s)$$

នាំឱ្យ $f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{d}{ds}F(s)\}$ (20)

ឧទាហរណ៍ទី៣១ រកតម្លៃ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\ln\frac{s-2}{s+2}\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយប្រើសមីការ (20) យើងបាន:

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{d}{ds}\ln\frac{s-2}{s+2}\}$$

$$= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4}{s^2-4}\} = -\frac{2}{t}\sinh 2t \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៣២ រកតម្លៃ $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយប្រើសមីការ (20) យើងបាន:

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{d}{ds}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s\right)\}$$

$$= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{-1}{1+s^2}\} = \frac{1}{t}\sin t \text{ ។}$$

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

៨– អនុគមន៍ខួប
(Periodic Functions)

អនុគមន៍ខួបគ្របដណ្តប់លើការសិក្សាអំពីមុខវិជ្ជាបច្ចេកទេសជាច្រើន ហើយមួយទៀតវាទាញចេញពីអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ។ ទ្រឹស្តីបទបន្ទាប់មកទៀតបង្ហាញអំពីវិធីរកបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ខួបណាមួយ។

ទ្រឹស្តីបទទី៦

បើ f(t) ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើចន្លោះរាប់អស់ណាមួយ និងជាអនុគមន៍ខួបដែលមានខួប p ចំពោះ $t \geq 0$ នោះគេបាន:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sp}}\int_0^p e^{-st} f(t)\, dt \qquad (21)$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ដោយ f(t) ជាអនុគមន៍ខួបដែលមានខួប p យើងអាចសរសេរ

$$f(t) = f(t+p) = f(t+2p) = \ldots\ldots\ldots = f(t+np) = \ldots\ldots\ldots$$

និង f(t) ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ នោះបម្លែងឡាប្លាសអាចសរសេរទៅជា:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt + \int_p^\infty e^{-st} f(t)\, dt \text{ ។}$$

យើងធ្វើការជំនួស $t = u + p$ នៅក្នុងអាំងតេក្រាលទីពីរ គេបាន: $dt = du$ ហើយ

$u = 0$ នោះ $t = p$

និង $u \to \infty$ នោះ $t \to \infty$ ។

ដូច្នេះ

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt + \int_0^\infty e^{-s(u+p)} f(u+p)\, du$$

$$= \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt + \int_0^\infty e^{-sp} e^{-su} f(u)\, du$$

$$= \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sp}\int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du$$

ប៉ុន្តែ $\int_0^{\infty} e^{-su} f(u)\, du = \mathcal{L}\{f(t)\}$ នោះគេបាន:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sp}\, \mathcal{L}\{f(t)\}$$

នាំឱ្យ $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$ ពិត ។

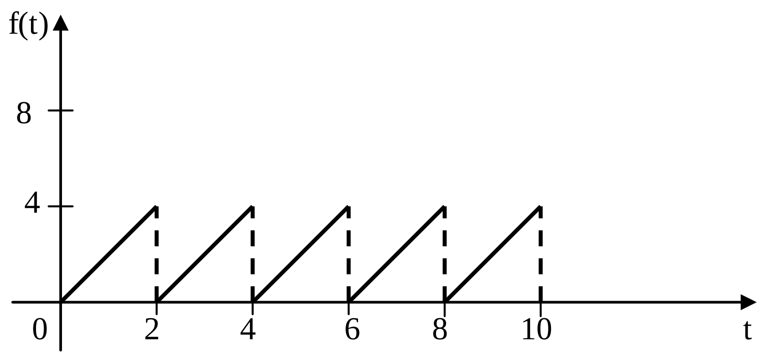
ឧទាហរណ៍ទី៣៣ កំណត់បម្លែងឡាប្លាសនៃរលករាងត្រីកោណខួបដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី៩:

$f(t) = 2t,\ 0 \le t < 2$ និង $f(t + 2) = f(t)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ f(t) ជាអនុគមន៍ខួបដែលមានខួបស្មើ 2 និងប្រើទ្រឹស្តីបទទី៦ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} \left[2t\right] dt$$



រូបទី៩

ការប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយយក

$u = t \quad \Rightarrow \quad du = dt$

និង $dv = e^{-st}\, dt \quad \Rightarrow \quad v = -\dfrac{1}{s} e^{-st}$

នោះគេបាន:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{1-e^{-2s}} \left[-\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{s} e^{-st} dt \right]$$

$$= \frac{2}{1-e^{-2s}} \left[-\frac{t}{s} e^{-st} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^2$$

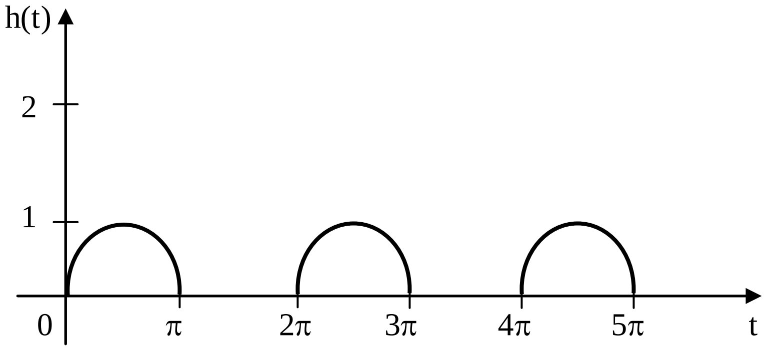
$$=\frac{2}{1-e^{-2s}}\left[-\frac{2e^{-2s}}{s}-\frac{e^{-2s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right]$$

$$=\frac{2}{1-e^{-2s}}\left[\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-2s}\right)-\frac{2e^{-2s}}{s}\right]$$

$$=\frac{2}{s^2}-\frac{4e^{-2s}}{s\left(1-e^{-2s}\right)}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៤ កំណត់បំលែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ដែលក្រាបវាបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី១០:

$$h(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\le t<\pi\\ 0, & \pi\le t<2\pi\end{cases}$$ និង $h(t) = h(t + 2\pi)$ ។



រូបទី១០

ក្រាបនេះ គេហៅថា " ការកែតម្រូវរលកពាក់កណ្ដាលនៃរលកស៊ីនុស " ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី៦ យើងបាន:

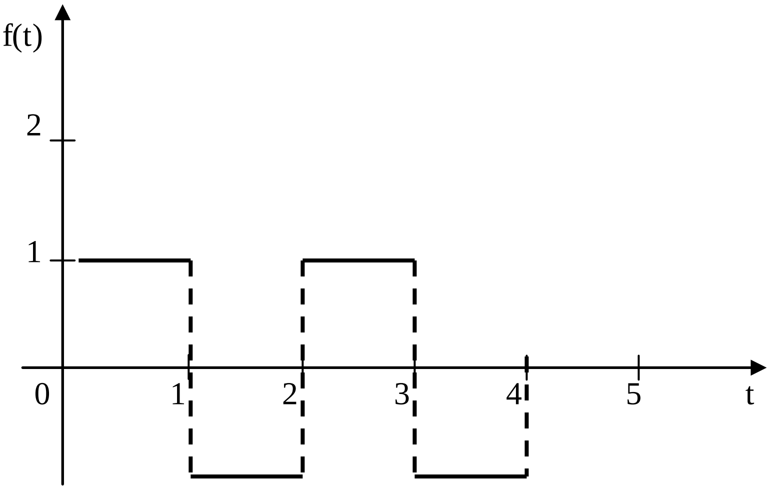
$$\mathcal{L}\{h(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi}e^{-st}\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{e^{-st}\left(-s\sin t-\cos t\right)}{s^2+1}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\right]$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៥ កំណត់បម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍រលករាងចតុកោណកែងដែលក្រាបវាបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី១១:

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ -1, & 1\le t<2\end{cases}$$ និង $f(t) = f(t+2)$ ។



រូបទី១១

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី៦ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}[1]\,dt+\int_1^2 e^{-st}[-1]\,dt\right]$$

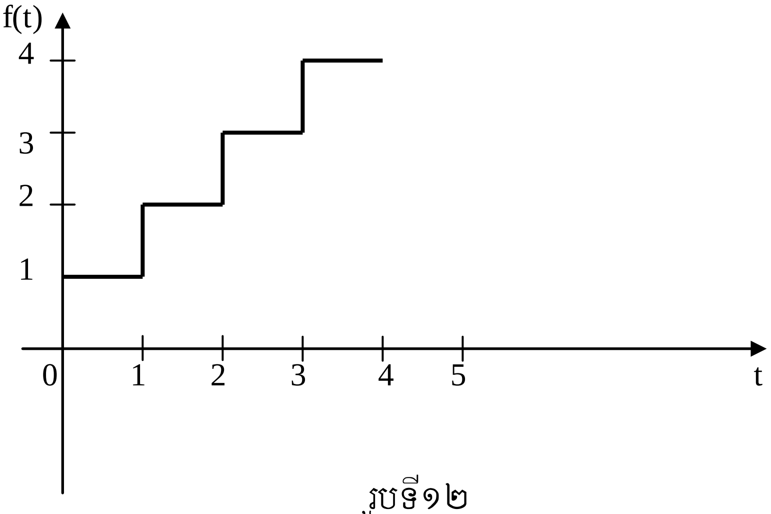
$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s}\right]$$

$$=\frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s\left(1-e^{-s}\right)\left(1+e^{-s}\right)}$$

$$=\frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៦ កំណត់បម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ជណ្តើរ ដែលក្រាបវាបានបង្ហាញនៅរូបទី១២:

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1\\ 2, & 1\le t<2\\ 3, & 2\le t<3\\ \vdots & \vdots\\ n, & n-1\le t<n\\ \vdots & \vdots\end{cases}\quad ។$$



រូបទី១២

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

អនុគមន៍នេះ មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបទេ។ បម្លែងឡាប្លាសវាអាចរកឃើញតាមការអនុវត្តផ្ទាល់នៃនិយមន័យ។ យ៉ាងណាក៏ដោយ តាមការសង្កេតឃើញថា អនុគមន៍ជណ្តើរស្មើនឹងផលដកនៃពីរអនុគមន៍ដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី១៣ នោះបម្លែងអាចរកឃើញដូចតទៅ:

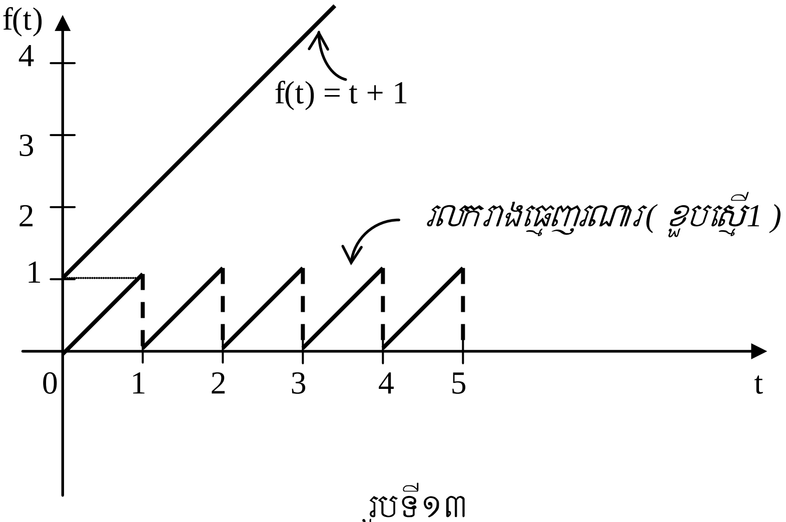
$$\mathcal{L}\{\text{អនុគមន៍ជណ្តើរ}\}=\mathcal{L}\{t+1\}\ -\ \mathcal{L}\{\text{អនុគមន៍រលករាងត្រីកោណ}\}$$

$$=\mathcal{L}\{t\}+\mathcal{L}\{1\}\ -\ \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-st}[t]\,dt$$

$$=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\ -\ \frac{1}{1-e^{-s}}\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{1}{s}e^{-st}\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{s}\ +\ \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

$$= \frac{1}{s(1-e^{-s})} \text{ ។}$$



រូបទី១៣

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

៩– ទ្រឹស្តីបទកុងវ៉ូលុយស្យុង និង សមីការអាំងតេក្រាល
(The Convolution Theorem and Integral Equations)

ពីទ្រឹស្តីបទ ៤ យើងទាញបានរូបមន្ត

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

សម្រាប់បម្លែងឡាប្លាសនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់។ ទ្រឹស្តីបទនេះ គឺជាករណីពិសេសមួយនៃទ្រឹស្តីបទកុងវ៉ូលុយស្យុងដើម្បីធ្វើការទាញបានពីអ្វីៗផ្សេងទៀតនៅក្នុងផ្នែកនេះ។ ជាដំបូង យើងកំណត់ប្រមាណវិធីនៃកុងវ៉ូលុយស្យុង។

និយមន័យ

តាង f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗចំពោះ $t \ge 0$ ។ នោះគេបានកុងវ៉ូលុយស្យុងនៃ f និង g តាងដោយ $f * g$ ហើយកំណត់ដោយ:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \qquad (22)$$

ការអត្ថាធិប្បាយ

ការធ្វើកុងវ៉ូលុយស្យុងនៃពីរអនុគមន៍ លំដាប់នៃពីរអនុគមន៍នោះមិនសំខាន់ទេ មានន័យថា:

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \qquad (23)$$

ឧទាហរណ៍ទី៣៧ រកកុងវ៉ូលុយស្យុងនៃ $\sin t$ និង $\cos t$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ពីនិយមន័យ គេបាន:

$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin(t-\tau)\, \cos\tau\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [\sin t + \sin(t-2\tau)]\, d\tau$$

$$= \left[\frac{\tau \sin t}{2} + \frac{\cos(t-2\tau)}{4}\right]_0^t$$

$$= \frac{t \sin t}{2} \text{ ។}$$

ទ្រឹស្តីបទទី៧

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ និងមានលំដាប់អុិចស្ប៉ូណង់ស្យែលចំពោះ $t \geq 0$ នោះគេបានបម្លែងឡាប្លាសកំណត់ដោយផលគុណរវាងបម្លែងនៃ f និងបម្លែងនៃ g មានន័យថា:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)\,G(s) \qquad (24)$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

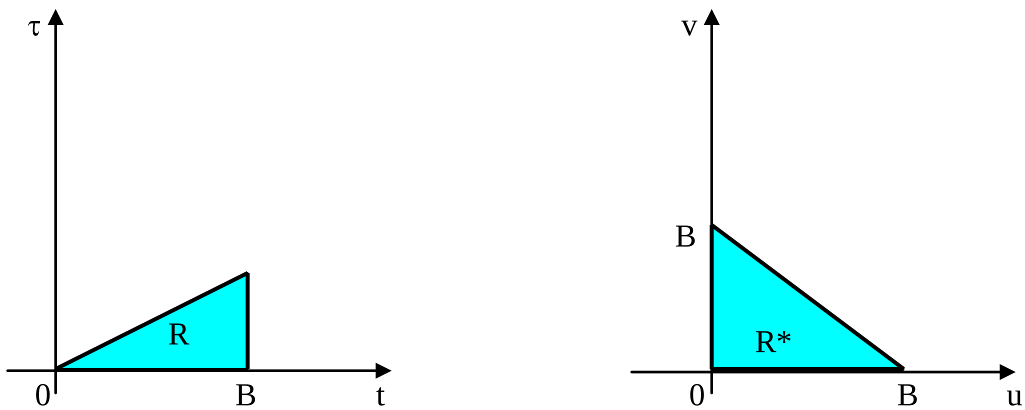
ពីនិយមន័យនៃបម្លែងឡាប្លាស និងកុងវ៉ូលុយស្យុង គេបាន:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,(f * g)(t)\,d$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\left[\int_0^{t} f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\right] dt$$

$$= \lim_{B\to\infty} \int_0^{B} e^{-st}\left[\int_0^{t} f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\right] dt \text{ ។}$$

អាំងតេក្រាលដដែលនេះស្មើនឹងអាំងតេក្រាលឌុបនៃ $e^{-st} f(t-\tau)\,g(\tau)$ លើតំបន់ R នៅក្នុងប្លង់ $(to\tau)$ រវាងអ័ក្សអាប់ស៊ីស t និងបន្ទាត់ $\tau = t$ (សូមមើលរូបទី១៤)។ ការប្តូរអថេរ $u = t - \tau, v = \tau$ នោះតំបន់ R ប្រែប្រួលទៅជាតំបន់ R^* នៅក្នុងប្លង់ (uov) ។



រូបទី១៤

ដូចនេះ

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \lim_{B\to\infty} \int_0^{B} \int_0^{B-v} e^{-s(u+v)}\, f(u)\,g(v)\,du\,dv$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du \right] e^{-sv} g(v)\, dv$$

$$= \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du \right) \left(\int_0^\infty e^{-sv} g(v)\, dv \right)$$

$= F(s)\, G(s)$ ពិត ។

ឧទាហរណ៍ទី៣៨ រកតម្លៃនៃ $\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\}$ បើ $f(t) = e^{-t}$ និង $g(t) = \sin 2t$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី៧ គេបាន:

$$\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}\, \mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

$$= \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{s^2+4} = \frac{2}{(s+1)\left(s^2+4\right)} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៣៩ ចូរប្រើទ្រឹស្តីបទកុងវ៉ូលុយស្យុងក្នុងការរកតម្លៃ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន: $$\frac{1}{s\left(s^2+1\right)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} = F(s)\, G(s)$$

ដោយ $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ និង $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$

នាំឱ្យ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$ និង $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \sin t$ ។

ដូច្នេះ $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} * \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}$$

$$= 1 * \sin t = \int_0^t [1] \sin\tau\, d\tau$$

$$= 1 - \cos t \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៤០ ចូរប្រើទ្រឹស្តីបទកុងវ៉ូលុយស្យុងក្នុងការរកតម្លៃ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s-2)}\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}=e^{-t}$ និង $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}=e^{2t}$ យើងបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s-2)}\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}*\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}$$

$$=e^{-t}*e^{2t}=\int_0^t e^{-\tau}e^{2(t-\tau)}d\tau$$

$$=\int_0^t e^{2t}\,e^{-3\tau}d\tau$$

$$=e^{2t}\int_0^t e^{-3\tau}d\tau$$

$$=e^{2t}\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[e^{2t}-e^{-t}\right]$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤១ ចូរប្រើទ្រឹស្តីបទកុងវ៉ូលុយស្យុងក្នុងការរកតម្លៃ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2}{\left(s^2+1\right)^2}\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងឃើញថា បម្លែងដែលឱ្យជាការ៉េនៃ $\frac{s}{s^2+1}$ ហើយបម្លែងច្រាសវាស្មើនឹង $\cos t$ ។

យើងបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}=\cos t*\cos t=\int_0^t\cos(t-\tau)\cos\tau\,d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos t+\cos\left(t-2\tau\right)\right]d\tau$$

$$=\left[\frac{1}{2}\tau\cos t-\frac{1}{4}\sin\left(t-2\tau\right)\right]_0^t$$

$$=\frac{t}{2}\cos t-\frac{1}{4}\sin\left(-t\right)+\frac{1}{4}\sin t$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin t+t\cos t\right]$$ ។

ទ្រឹស្តីបទកុងវ៉ូលុយស្យុងមានសារៈសំខាន់ក្នុងការអនុវត្តជាច្រើន។ ជាឧទាហរណ៍ ចូរពិនិត្យបញ្ហាតម្លៃដើម:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t) \quad \text{និង} \quad y(0) = y'(0) = 0 \text{ ។}$$

ការផ្ទេបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងពីរ យើងបាន:

$$Y(s)\cdot\left(a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) = F(s) \text{ ។}$$

តាង $K(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ និងការដោះស្រាយរក $Y(s)$ យើងបាន:

$$Y(s) = \frac{1}{K(s)} F(s) \text{ ។}$$

បើ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{K(s)}\right\} = k(t)$ នោះយើងបាន:

$$y(t) = k(t) * f(t) \qquad (25)$$

ឧទាហរណ៍ទី៤២ ប្រើរូបមន្ត (25) ដើម្បីសរសេរចម្លើយនៃបញ្ហាតម្លៃដើម:

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

បន្ទាប់មកសរសេរចម្លើយចំពោះ $f(t) = 1$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយប្រើរូបមន្ត (25) នោះគេបានចម្លើយនៃសមីការកំណត់ដោយ:

$$y(t) = k(t) * f(t)$$

ដែល

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{K(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃ $y(t)$ គឺ:

$$y(t) = \sin t * f(t) \text{ ។}$$

បើ $f(t) = 1$ នោះគេបាន:

$$y(t) = \sin t * 1 = \int_0^t \sin\tau \, d\tau = 1 - \cos t \text{ ។}$$

ទ្រឹស្តីបទកុងវ៉ូលុយស្យុងមានផលប្រយោជន៍យ៉ាងធំធេងសម្រាប់គេយកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងការដោះស្រាយសមីការ ដែលមានអនុគមន៍ជាអញ្ញាតលើល័ក្ខខ័ណ្ឌសញ្ញាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់។ សមីការប្រភេទនេះ ហៅថាជា *សមីការអាំងតេក្រាល*។ ដើម្បីប្រើបម្លែងឡាប្លាស អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ត្រូវតែជាអាំងតេក្រាលកុងវ៉ូលុយស្យុង ឬ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍ជាអញ្ញាត។

ឧទាហរណ៍ទី៤៣ កំណត់អនុគមន៍ y បើ

$$y = t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau \text{ ។}$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងពីរ និងតាងបម្លែងនៃ y ដោយ Y(s) នោះគេបាន:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s)\frac{1}{s^2+1}$$

នាំឱ្យ

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} \text{ ។}$$

ដោយធ្វើបម្លែងច្រាស យើងបាន:

$$y = t + \frac{t^3}{6} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៤៤ ដោះស្រាយសមីការអាំងតេក្រាល

$$y(t) = t + \int_0^t y(x)\,dx + \int_0^t (t-x)\,y(x)\,dx \text{ ។}$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងពីរ និងតាងបម្លែងនៃ y ដោយ Y(s) នោះគេបាន:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}Y(s) + \frac{1}{s^2}Y(s)$$

នាំឱ្យ

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - s - 1}$$

$$= \frac{1}{s^2 - s + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}}$$

$$= \frac{1}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} \text{ ។}$$

ដោយធ្វើបម្លែងច្រាស នោះយើងបានចម្លើយនៃសមីការគឺ:

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{t/2} \sinh(\frac{\sqrt{5}}{2} t) \text{ ។}$$

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

១០ – អនុគមន៍ជំហាន
(A Step Function)

អនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ ត្រូវបានគេពិពណ៌នានៅក្នុងផ្នែកមុន ដោយតាមការផ្តល់នូវរូបមន្តដ៏សមរម្យ លើចន្លោះរងនីមួយៗនៃដែនកំណត់។ ជាឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ f(t) ដែលមានតម្លៃស្មើ 2 ចំពោះ $0 \le t < 4$ និងស្មើ t ចំពោះ $t \ge 4$ ។

ជួនកាល គេមានបំណងសរសេរអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ ជារូបមន្តតែមួយគត់សម្រាប់ដែនកំណត់វា។ បញ្ហានេះអាចគេធ្វើបានដោយការប្រើអនុគមន៍មួយ ហៅថាជា *អនុគមន៍ជំហានឯកតា* ដូចជាការសង់ប្លុកមួយ។ អនុគមន៍នេះ គេហៅផងដែរថាជា អនុគមន៍ Heaviside នៅក្នុងការទទួលកិត្តិយសពីវិស្វករជនជាតិអង់គ្លេស Oliver Heaviside (1850-1925) ដែលបានត្រួសត្រាយយ៉ាងច្រើនអំពីការអនុវត្តនៃបម្លែងឡាប្លាស។

និយមន័យ

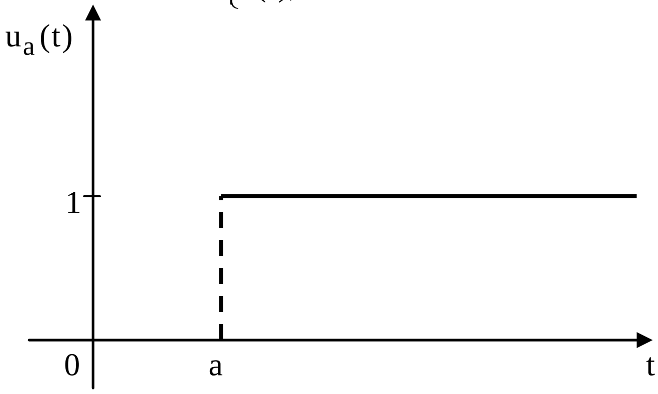
អនុគមន៍ជំហានឯកតា ត្រូវបានគេតាងឱ្យ $u_a(t)$ និងកំណត់ដោយ:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases} \qquad (26)$$

ចំនួនថេរពិត a ចង្អុលប្រាប់ជាចំណុចនៅត្រង់ជំហានដែលកើតឡើង (សូមមើលរូបទី១៥) ។

ជួនកាល អនុគមន៍ $u_a(t)$ ហៅថាជា *អនុគមន៍មានចរន្ត* (Turn-on Function) ពីព្រោះនៅពេលគេគុណវាទៅនឹងអនុគមន៍មួយទៀត នោះលទ្ធផលវាស្មើ 0 ចំពោះ $t < a$ និងស្មើ f(t) ចំពោះ $t > a$ ។ ដូចនេះ គេសរសេរជា

$$u_a(t)\, f(t) = \begin{cases} 0, & \text{បើ } t < a \\ f(t), & \text{បើ } t > a \end{cases} \qquad (27)$$



រូបទី១៥

បន្ទាំនៃអនុគមន៍ជំហានឯកតា អាចត្រូវបានគេប្រើក្នុងការសរសេរទៅជាអនុគមន៍ផ្សេងទៀត ដូចជា អនុគមន៍ផាសឯកតា ដែលបានកំណត់ខាងក្រោម និងបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី១៦ ។

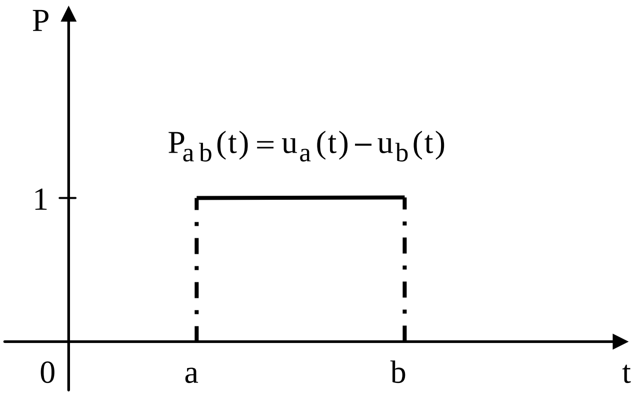
និយមន័យ

អនុគមន៍ផាសឯកតា ត្រូវបានគេតាងជា $P_{ab}(t)$ និងកំណត់ដោយៈ

$$P_{ab}(t)=\begin{cases}1, & a<t<b\\ 0, & t\notin(a,b)\end{cases} \qquad (28)$$

ហើយ $P_{ab}(t)$ អាចសរសេរជាអនុគមន៍នៃអនុគមន៍ជំហានឯកតា

$$P_{ab}(t)=u_a(t)-u_b(t) \qquad (29)$$



រូបទី១៦

យើងឃើញថា $u_a(t)-u_b(t)$ ស្មើសូន្យ ចំពោះ $t<a$ ពីព្រោះ $u_a(t)$ និង $u_b(t)$ ស្មើសូន្យ ។ ចំពោះ $a<t<b$, $u_a(t)=1$ និង $u_b(t)=0$ នាំឱ្យ $u_a(t)-u_b(t)=1$ ។ ចំពោះចន្លោះ $t>b$, $u_a(t)=1$ និង $u_b(t)=1$ នាំឱ្យ $u_a(t)-u_b(t)=0$ ។

ឧទាហរណ៍ទី៤៥ សរសេរ $f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<4\\ t, & t>4\end{cases}$ ជាអនុគមន៍នៃអនុគមន៍ជំហានឯកតា។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងចាប់ផ្តើមដោយធ្វើការសង្កេតឃើញថា $f(t)=2$ ចំពោះ $0<t<4$ អាចសរសេរទៅជា $2[P_{04}(t)]=2[u_0(t)-u_4(t)]$ ហើយ $f(t)=t$ ចំពោះ $t>4$ អាចសរសេរជា $t\,u_4(t)$ ។

ការបូកកន្សោមខាងលើ យើងបាន:

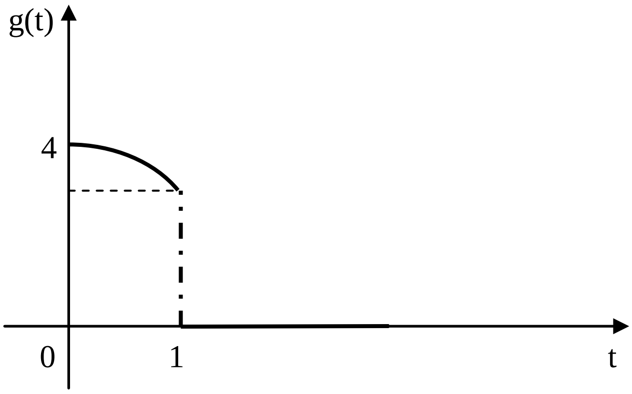
$$f(t)=2\left[u_0(t)-u_4(t)\right]+t\,u_4(t)$$

$$=2u_0(t)-2u_4(t)+t\,u_4(t)\text{ ។}$$

ដោយ $u_0(t)=1$ ចំពោះ $t\geq 0$ នោះ f(t) អាចសរសេរជា

$$f(t)=2-2u_4(t)+t\,u_4(t)\text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៤៦ សរសេរ $g(t)=\begin{cases}4-t^2, & 0<t<1\\ 0, & t>1\end{cases}$ ជាអនុគមន៍នៃអនុគមន៍ជំហានឯកតា (សូមមើលរូបទី១៧) ។



រូបទី១៧

ដំណោះស្រាយ

ដោយ 4 – t^2 ស្មើនឹងអនុគមន៍មានចន្លោះចំពោះ 0 < t < 1 និងស្មើនឹងសូន្យចំពោះតម្លៃ t ផ្សេងទៀត នោះយើងអាចសរសេរ

$$g(t)=P_{01}(t)\cdot\left(4-t^2\right)$$

$$=\left(4-t^2\right)\left[u_0(t)-u_1(t)\right]\text{ ។}$$

ទ្រឹស្តីបទទី៨

តាង $u_a(t)$ ជាអនុគមន៍ជំហានឯកតា ចំពោះ $t\geq 0$ នោះគេបាន:

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0 \qquad (30)$$

និងរូបមន្តបម្លែងច្រាស

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} = u_a(t) \qquad (31)$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

ដោយ $u_a(t)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ និងមានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលចំពោះ $t \geq 0$ នាំឱ្យវាមានបម្លែងឡាប្លាស។ តាមនិយមន័យ គេបាន:

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left[u_a(t)\right]dt$$

$$= \int_0^{a} e^{-st}[0]\,dt + \int_a^{\infty} e^{-st}[1]\,dt$$

$$= \lim_{B\to\infty} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^B$$

$$= \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{បើ } s > 0$$

ហើយគេទាញបាន: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} = u_a(t)$ ។

យើងកត់សំគាល់ថា បើ $a = 0$ នោះរូបមន្ត (30) ទៅជា:

$$\mathcal{L}\{u_0(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \text{ ចំពោះ } t > 0 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ទី៤៧ កំណត់អនុគមន៍ $f(t)$ និងសង់ក្រាបវា ប្រសិនបើ

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(1-e^{-2s}\right)^2}{s}\right\} \text{ ។}$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងបាន:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(1-2e^{-2s}+e^{-4s}\right)\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{2e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-4s}}{s}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s}\right\}$$

$$= 1 - 2u_2(t) + u_4(t) \text{ ។}$$

ដើម្បីសរសេរ $f(t)$ ដោយគ្មានអនុគមន៍ជំហានទេនោះ យើងពិនិត្យចន្លោះ $0 < t < 2$ នោះអនុគមន៍ $u_2(t)$ និង $u_4(t)$ ស្មើនឹងសូន្យ ។ គេបាន:

$$f(t) = 1, \quad 0 < t < 2 \text{ ។}$$

ចំពោះចន្លោះ $2 < t < 4$, $u_2(t) = 1$ និង $u_4(t) = 0$ នាំឱ្យ

$$f(t) = 1 - 2 = -1, \quad 2 < t < 4 \text{ ។}$$

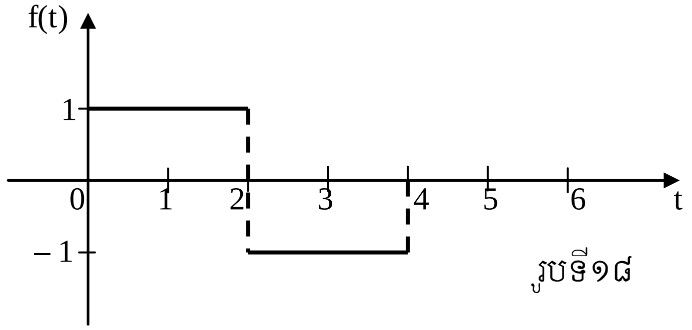
ចំពោះ $t > 4$ នោះអនុគមន៍ $u_2(t)$ និង $u_4(t)$ ស្មើនឹង 1 ។ គេបាន:

$$f(t) = 1 - 2 + 1 = 0, \quad t > 4 \text{ ។}$$

បន្សំនៃលទ្ធផលទាំងនេះ យើងបានចម្លើយគឺ:

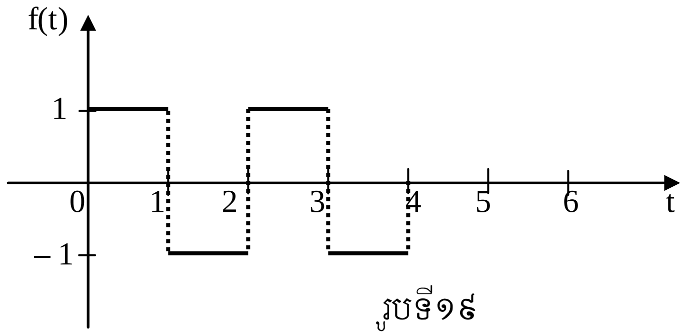
$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2 \\ -1, & 2 < t < 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases} \text{ ។}$$

ក្រាបនៃ $f(t)$ ត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី១៨ ខាងក្រោម:



រូបទី១៨

ឧទាហរណ៍ទី៤៨ សរសេរអនុគមន៍រលករាងការេខួប ដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី១៩ ជាអនុគមន៍នៃអនុគមន៍ជំហានឯកតា ហើយបន្ទាប់មករកបម្លែងឡាប្លាសវា។



រូបទី១៩

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍រលកការេ អាចសរសេរជាអនុគមន៍ផាសដដែលៗ ដោយឆ្លាស់គ្នារវាង 1 និង -1 យើងបាន៖

$$f(t) = P_{01}(t) - P_{12}(t) + P_{23}(t) - P_{34}(t) + \ldots\ldots$$

$$= \left[u_0(t) - u_1(t)\right] - \left[u_1(t) - u_2(t)\right] + \left[u_2(t) - u_3(t)\right] - \ldots\ldots$$

$$= u_0(t) - 2u_1(t) + 2u_2(t) - 2u_3(t) + \ldots..$$

$$= u_0(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(t) \text{ ។}$$

បម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍នេះ អាចរកឃើញដោយប្រើរូបមន្តចំពោះអនុគមន៍ខួប ដែលបានបង្កើតនៅក្នុងទ្រឹស្តីបទទី២។ ដូច្នេះ

$$\mathcal{L}\left\{\text{អនុគមន៍រលករាងការេ}\right\} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int_0^1 e^{-st}\,dt - \int_1^2 e^{-st}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^1 - \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_1^2\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}\right]$$

$$= \frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s\left(1-e^{-s}\right)\left(1+e^{-s}\right)}$$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)} \text{ ។}$$

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

១១– ទ្រឹស្តីបទរំកិលទី ២
(The Second Shifting Theorem)

យើងបានសិក្សាទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ រួចមកហើយ ដែលបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍បម្លែងត្រូវបានបម្លាស់ទីទៅខាងស្តាំ ឬខាងឆ្វេង បើសិនអនុគមន៍នៃ t ជាពហុគុណនឹងអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។ ទ្រឹស្តីបទរំកិលទី២បានបង្ហាញលទ្ធផលជាផលគុណរវាងបម្លែង និងអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។ ដូចគ្នាដែរ ប្រមាណវិធីគុណមួយអាចទទួលបានលទ្ធផលក្នុងទម្រង់រំកិលនៃអនុគមន៍បម្លែងច្រាស។

ទ្រឹស្តីបទទី៩

តាង $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ នោះគេបាន៖

$$\mathcal{L}\{u_a(t)\ f(t-a)\} = e^{-as}\,F(s), \quad a > 0 \qquad (32)$$

និង
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}\,F(s)\right\} = u_a(t)\ f(t-a) \qquad (33)$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

តាមនិយមន័យ យើងបាន៖

$$e^{-as}\,F(s) = e^{-as}\int_0^{\infty} e^{-sx}\,f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(x+a)}\,f(x)\,dx$$

ក្នុងអាំងតេក្រាល យើងធ្វើការជំនួសអថេរ $t = x + a$

នាំឱ្យ $x = t - a, \quad dx = dt$ ហើយ

$$e^{-as}\,F(s) = \int_a^{\infty} e^{-st}\,f(t-a)\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\,u_a(t)\,f(t-a)\,dt$$

$$= \mathcal{L}\{u_a(t)\ f(t-a)\}$$ ។

ពីទ្រឹស្តីបទទី៩ យើងធ្វើការសង្កេតដូចតទៅ៖

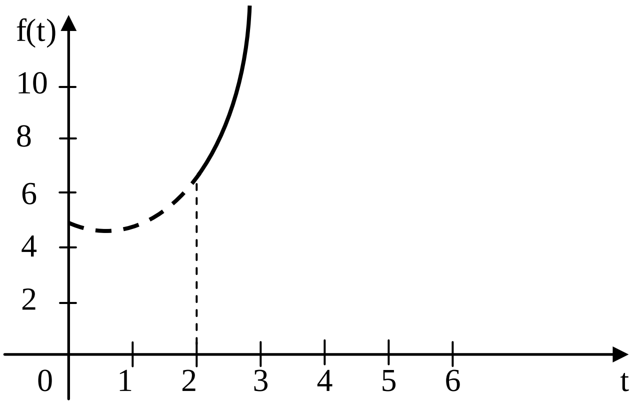
1. នៅពេលគេរកបម្លែងនៃអនុគមន៍មួយគុណនឹងអនុគមន៍ជំហានឯកតា $u_a(t)$ មួយ ជាដំបូង អនុគមន៍នោះត្រូវតែសរសេរជាអនុគមន៍នៃ $t-a$ ។ បន្ទាប់មក លទ្ធផលនៃទ្រឹស្តីបទអាចអនុវត្តបាន។

2. ប្រមាណវិធីគុណនៃបម្លែងទៅនឹងអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល e^{-as} បណ្តាលឱ្យរំកិលទៅខាងស្តាំនៃអនុគមន៍ច្រាស និងជាអនុគមន៍មានចរន្តនៅត្រង់ $t=a$ ។

ទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ បានបង្ហាញអំពីរបៀបរំកិលនៃអនុគមន៍បម្លែងដែលកើតមានឡើងនៅពេលអនុគមន៍នៃ t គុណទៅនឹង e^{at} ។ ទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ និងទី២មានលក្ខណៈស្រដៀងគ្នា ប៉ុន្តែលក្ខណៈមានចរន្ត (turn-on) មានតែមួយគត់សម្រាប់ទ្រឹស្តីបទទី២ប៉ុណ្ណោះ។

ឧទាហរណ៍ទី ៤៩ ប្រើអនុគមន៍ជំហានឯកតាក្នុងការរកតម្លៃ $\mathcal{L}\{f(t)\}$ បើ

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0<t<2\\ t^2-t+5, & t>2\end{cases} ។$$



រូបទី២០

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

អនុគមន៍ដែលគេឱ្យអាចសរសេរជា៖

$$f(t)=\left(t^2-t+5\right)u_2(t) ។$$

ដើម្បីប្រើទ្រឹស្តីបទទី៩ យើងត្រូវតែសរសេរ $f(t)$ ជាអនុគមន៍នៃ $(t-2)$ ។ តាមការពិនិត្យពិច័យ យើងបូក និងដក $4t$ និង 4 ទៅនឹងសមីការដឺក្រេទីពីរដែលគេឱ្យ ដើម្បីកំណត់បានតួ $(t-2)^2$ ។

ដូចនេះ $t^2-t+5=(t-2)^2+3t+1$ ។

នៅទីបញ្ចប់ ការបូកនិងការដកទៅនឹង 6 យើងទទួលបាន:

$$t^2 - t + 5 = (t-2)^2 + 3(t-2) + 7$$ ។

ដូចនេះ បម្លែងឡាប្លាសកំណត់ដោយ:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\left(t^2 - t + 5\right) u_2(t)\right\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{\left[(t-2)^2 + 3(t-2) + 7\right] u_2(t)\right\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{(t-2)^2 u_2(t) + 3(t-2)\, u_2(t) + 7\, u_2(t)\right\}$$

$$= \mathcal{L}\{(t-2)^2 u_2(t)\} + 3\,\mathcal{L}\{(t-2)\, u_2(t)\} + 7\,\mathcal{L}\{u_2(t)\}$$

$$= \frac{2}{s^3} e^{-2s} + \frac{3}{s^2} e^{-2s} + \frac{7}{s} e^{-2s}$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី ៥0 រកចម្រាស់នៃអនុគមន៍បម្លែង $\frac{e^{-4s}}{s^2}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោយ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$ និងកត្តា e^{-4s} បណ្តាលឱ្យមានការរំកិលមួយទៅជាអនុគមន៍ $t-4$ ហើយមានលក្ខណៈមានចរន្តនៅត្រង់ចំណុចនោះ គេបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s^2}\right\} = u_4(t)\,(t-4)$$ ។

ឧទាហរណ៍ទី ៥១ រកតម្លៃនៃ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+2)^2 + 9}\right\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ពីទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ និងតារាងទី១ នៃបម្លែងឡាប្លាស យើងបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2 + 9}\right\} = \frac{1}{3} e^{-2t} \sin 3t$$ ។

ការធ្វើប្រមាណវិធីគុណនឹងកត្តាអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល e^{-s} បណ្តាលឱ្យមានការបម្លាស់ទីមួយ និងការធ្វើ

ប្រមាណវិធីគុណនឹងអនុគមន៍ជំហានឯកតាមួយ។ ដូច្នេះ

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+2)^2+9}\right\}=\left[\frac{1}{3}e^{-2(t-1)}\sin 3(t-1)\right]u_1(t) \text{ ។}$$

ក្នុងការអនុវត្តមួយចំនួន វានឹងមានលក្ខណៈចាំបាច់ក្នុងការសរសេរបម្លែងដែលមានទម្រង់ $\frac{1}{1-u}$ ទៅជាស៊េរីធរណីមាត្រ $1 + u + u^2 + u^3 + \dots\dots\dots.$ មុនពេលធ្វើការបម្លែងច្រាស។ ឧទាហរណ៍ពីរខាងក្រោមជាតួយ៉ាង និងនៅពេលដែលគេដោះស្រាយវាហាក់ដូចជាស្រដៀងគ្នា ដែលនាំទៅរកលទ្ធផលផ្សេងៗគ្នាដ៏សារៈសំខាន់។

ឧទាហរណ៍ទី៥២ ចូរកំណត់ $f(t)$ បើ $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s\left(1-e^{-2s}\right)}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងពន្លាតកន្សោម $\frac{1}{1-e^{-2s}}$ ទៅជាស៊េរីធរណីមាត្រដូចតទៅ:

$$\frac{1}{1-e^{-2s}}=1+e^{-2s}+e^{-4s}+e^{-6s}+\dots\dots.. \text{ ។}$$

ដូច្នេះ $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(1-e^{-2s})}\}$

$$=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}+\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s}\}+\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{s}\}+\dots\dots..$$

$$=u_0(t)+u_2(t)+u_4(t)+\dots\dots...$$

(សូមមើលរូបទី១២)។

ឧទាហរណ៍ទី ៥៣ ចូររកតម្លៃ និងសង់ក្រាបនៃ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)\left(1-e^{-s}\right)}\right\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គេបាន:

$$\frac{1}{(s+1)(1-e^{-s})}=\frac{1}{s+1}(1+e^{-s}+e^{-2s}+\dots\dots+e^{-ns}+\dots\dots)$$

$$=\frac{1}{s+1}+\frac{e^{-s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s+1}+\dots\dots+\frac{e^{-ns}}{s+1}+\dots.. \text{ ។}$$

ដោយធ្វើការបម្លែងច្រាសពីតួមួយទៅតួមួយ យើងបាន:

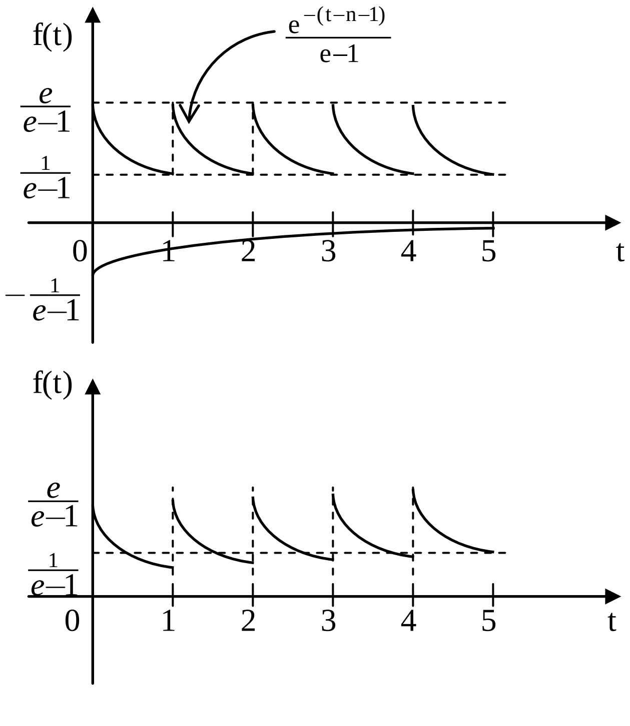
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)\left(1-e^{-s}\right)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+1}\right\}+.....+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-ns}}{s+1}\right\}+.....$$

$$=e^{-t}+e^{-(t-1)}u_1(t)+e^{-(t-2)}u_2(t)+.....+e^{-(t-n)}u_n(t)+......$$

ដូចនេះ

$$f(t)=\begin{cases} e^{-t}, & 0<t<1 \\ e^{-t}(1+e), & 1<t<2 \\ e^{-t}(1+e+e^2), & 2<t<3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ e^{-t}(1+e+e^2+.......+e^n)=\dfrac{e^{n+1}-1}{e-1}e^{-t}=\dfrac{e^{-(t-n-1)}}{e-1}-\dfrac{e^{-t}}{e-1}, & n<t<n+1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases}$$

កន្សោម f(t) លើចន្លោះទូទៅ (n, n + 1) មានពីរតួ។ តួទី១គឺ $\frac{e^{-(t-n-1)}}{e-1}$ ជាអនុគមន៍ខួប ដែលថយចុះតាមអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលពី $\frac{e}{e-1}$ មក $\frac{1}{e-1}$ នៅលើចន្លោះនោះ។ វាមានការលោតដាច់ៗ នៃទំហំ $\frac{e}{e-1}-\frac{1}{e-1}=1$ ត្រង់គ្រប់តម្លៃជាចំនួនគត់នៃ t ។ តួទី២គឺ $\frac{e^{-t}}{e-1}$ ជាកន្សោមមិនបិតថេរដែល បាត់បន្តិចម្តងៗយ៉ាងលឿនតាមកំណើនកើនឡើង t ។ រូបទី២១ បង្ហាញអំពីការវិភាគទានដែលតួនីមួយៗ បានធ្វើឡើង។



រូបទី២១

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

លំហាត់

រកតម្លៃបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមដោយប្រើលក្ខណៈលីនេអ៊ែរ និងតារាងទី១៖

1. $\mathcal{L}\left\{t^3\right\}$
2. $\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\right\}$
3. $\mathcal{L}\left\{2t^4+t^2+6\right\}$
4. $\mathcal{L}\left\{e^{7t}+e^{-2t}\right\}$
5. $\mathcal{L}\left\{e^{-2t}+4e^{t}\right\}$
6. $\mathcal{L}\left\{3t^2+\cos 2t\right\}$
7. $\mathcal{L}\left\{t^5e^{-3t}\right\}$
8. $\mathcal{L}\left\{4t^3e^{2t}\right\}$
9. $\mathcal{L}\left\{e^{3t}+\sin 3t\right\}$
10. $\mathcal{L}\left\{3\sin 4t-2\cos 4t\right\}$
11. $\mathcal{L}\left\{t^3-\sinh 2t\right\}$
12. $\mathcal{L}\left\{1-2t+\cosh 3t\right\}$
13. $\mathcal{L}\left\{2te^{-t}+e^{-t}\right\}$
14. $\mathcal{L}\left\{5+te^{-2t}-e^{-2t}\right\}$
15. $\mathcal{L}\left\{t(t-2)e^{3t}\right\}$
16. $\mathcal{L}\left\{(t-2)^2e^{4t}\right\}$
17. $\mathcal{L}\left\{(1-e^{t/2})^2\right\}$
18. $\mathcal{L}\left\{(1+\cos 2t)^2\right\}$ ។

19. ស៊ីនុសអ៊ីពែបូលិកនៃ u តាងដោយ sinh u និងកំណត់ដោយ៖

$$\sinh u=\frac{1}{2}\left(e^{u}-e^{-u}\right) \text{ ។}$$

ដោយប្រើនិយមន័យនេះ និងបម្លែងឡាប្លាសចំពោះ e^{kt} បង្ហាញថា៖

$$\mathcal{L}\left\{\sinh kt\right\}=\frac{k}{s^2-k^2},\qquad s>|k| \text{ ។}$$

20. ដោយប្រើ $\cosh u=\frac{1}{2}\left(e^{u}+e^{-u}\right)$ បង្ហាញថា៖

$$\mathcal{L}\left\{\cosh kt\right\}=\frac{s}{s^2-k^2},\qquad s>|k| \text{ ។}$$

21. បង្ហាញថា៖

$$\mathcal{L}\left\{\sin kt\cos kt\right\}=\frac{k}{s^2+4k^2},\qquad s>0 \text{ ។}$$

22. បង្ហាញថា៖

$$\mathcal{L}\left\{\sin^2 kt\right\} = \frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}, \qquad s>0$$ ។

បង្ហាញថា អនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោមសុទ្ធតែជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើចន្លោះ $t \ge 0$ ៖

23. $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<2\\ 2, & t>2\end{cases}$

24. $f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t<4\\ 4, & t>4\end{cases}$

25. $g(t)=\begin{cases}t+2, & 0\le t<1\\ 5, & t>1\end{cases}$

26. $h(t)=\begin{cases}t^2, & 0\le t<2\\ 6, & t>2\end{cases}$

27. $f(t)=\begin{cases}e^t, & 0\le t<2\\ 0, & t>2\end{cases}$

28. $m(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\le t<\pi\\ 0, & t>\pi\end{cases}$

29. $f(t)=\dfrac{\cos t-1}{t}$

30. $x(t)=\dfrac{1-e^t}{t}$ ។

31. បង្ហាញថា $f(t)=t^{-1/2}$ មិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើ $t\ge 0$ ។

32. រកបម្លែងឡាប្លាសនៃ f(t) បើ $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<2\\ 2, & t>2\end{cases}$ ។

33. រកបម្លែងឡាប្លាសនៃ f(t) បើ $f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t<4\\ 4, & t>4\end{cases}$ ។

34. រកបម្លែងឡាប្លាសនៃ f(t) បើ $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<2\\ 2, & t>2\end{cases}$ ។

35. រកបម្លែងឡាប្លាសនៃ g(t) បើ $g(t)=\begin{cases}t+2, & 0\le t<1\\ 5, & t>1\end{cases}$ ។

36. រកបម្លែងឡាប្លាសនៃ h(t) បើ $h(t)=\begin{cases}t^2, & 0\le t<2\\ 6, & t>2\end{cases}$ ។

37. រកបម្លែងឡាប្លាសនៃ f(t) បើ $f(t)=\begin{cases}e^t, & 0\le t<2\\ 0, & t>2\end{cases}$ ។

38. រកបម្លែងឡាប្លាសនៃ m(t) បើ $m(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\le t<\pi\\ 0, & t>\pi\end{cases}$ ។

39. គណនា $\mathcal{L}\{x(t)\}$ បើ $x(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<2\\ 2, & 2<t<4\\ 0, & t>4\end{cases}$ ។

បង្ហាញថាអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោមសុទ្ធតែជាអនុគមន៍មានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលៈ

40. t^3

41. $t^{1/2}$

42. $t^2 e^{3t}$

43. sin t

44. sinh t

45. t sin 2t

46. $\frac{1}{t}\sin kt$

47. t^n

48. $t^n e^{kt}$

49. $t^n \sin kt$ ។

50. បង្ហាញថា អនុគមន៍ទាល់ទាំងអស់មានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

51. បង្ហាញថា បម្លែងឡាប្លាសនៃពហុធាណាមួយមានជានិច្ច។

52. ចង្អុលបង្ហាញថា តើអនុគមន៍ខាងក្រោមមួយណាជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ និងមានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូ–ណង់ស្យែលលើ $t\ge 0$:

(a). $t^{1/2}$ (b). e^{t^2} (c). $\frac{1}{t-2}$

(d). $\sin e^{t^2}$ (e). t^{-3} ។

53. ការពិតអនុគមន៍មួយមានបម្លែងឡាប្លាស ពុំមែនមានន័យថាដេរីវេវានឹងមានបម្លែងឡាប្លាសនោះទេ។ ចូរឱ្យឧទាហរណ៍មួយនៃអនុគមន៍ដែលមានបម្លែងឡាប្លាស ប៉ុន្តែដេរីវេវាមិនមានទេ។

54. បង្ហាញថា បើអនុគមន៍ f និង f ' ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ និងមានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ហើយ $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ នោះគេបាន $\lim_{s\to\infty} sF(s)$ ជាចំនួនកំណត់។

55. ដោយប្រើលទ្ធផលនៃលំហាត់ទី 54 បង្ហាញថា $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ មិនមែនជាបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍មួយដែលជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ និងមានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនោះទេ។

គណនាបម្លែងឡាប្លាសច្រាសដូចតទៅ:

56. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$ 57. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}$ 58. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+9}\right\}$

59. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+1}\right\}$ 60. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$ 61. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^5}\right\}$

62. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^5}\right\}$ 63. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\}$ 64. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{s^2-16}\right\}$

65. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2-9}\right\}$ 66. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+4s-5}\right\}$ 67. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2-s-6}\right\}$

68. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+12}{s^3+s^2-6s}\right\}$ 69. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3}\right\}$ 70. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^3}\right\}$

71. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+3s-6}{s(s-1)^2}\right\}$ 72. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3-s^2}\right\}$ 73. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-3s+6}{(s^2-1)(3-2s)}\right\}$

74. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s^2+1)}{s^3+2s}\right\}$ 75. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+2}{s^3+2s}\right\}$ 76. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+s^2-s+1}{(s-1)^2(s^2+1)}\right\}$

77. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5+3s-s^2}{(s^2+2s-3)(s^2+5)}\right\}$ ។

ប្រើទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ ដើម្បីរកបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ដែលគេឱ្យខាងក្រោម:

78. $t^2 e^{2t}$ 79. $e^{-2t}\sin 5t$ 80. $e^{2t}\sinh t$

81. $e^t(\cos 2t-3\sin 5t)$ 82. $e^{2t}\sin 3t\cos 3t$

83. $P(t)e^{at}$ ដែល $P(t)=a_n t^n+a_{n-1}t^{n-1}+.....+a_2 t^2+a_1 t+a_0$

84. $e^{-t}\cos^2 2t$ 85. $e^{-3t}(1+\sin 4t)^2$

86. $e^t\cdot g(t)$ ដែល $g(t)=\begin{cases} t, & 0\le t<2 \\ 2, & t\ge 2\end{cases}$

87. $e^{2t}\cdot h(t)$ ដែល $h(t)=\begin{cases} e^t\,, & 0\le t<2 \\ 0\,, & t\ge 2\end{cases}$

88. $e^{-t}\cdot g(t)$ ដែល $g(t)=\begin{cases} 2\,, & 0\le t<5 \\ 0\,, & t\ge 5\end{cases}$

89. $e^{3t}\cdot f(t)$ ដែល $f(t)=\begin{cases} t\,, & 0\le t<1 \\ 0\,, & t\ge 1\end{cases}$ ។

គណនាបម្លែងឡាប្លាសច្រាសខាងក្រោម៖

90. $\dfrac{1}{s^2+3s+3}$ 91. $\dfrac{1}{s^2+3s+1}$ 92. $\dfrac{s+5}{(s+2)^3}$

93. $\dfrac{1}{s^2-s+1}$ 94. $\dfrac{s}{s^2+2s+5}$ 95. $\dfrac{s}{s^2+6s+9}$

96. $\dfrac{s+1}{s^2-6s+13}$ 97. $\dfrac{2s}{s^2+10s+34}$ 98. $\dfrac{1}{s(s+1)(s^2+4s+5)}$

99. $\dfrac{s^2}{(s+1)^4}$ ។

100. បង្ហាញថា $\mathcal{L}\{f(at)\}=\dfrac{1}{a}F(\dfrac{s}{a})$ ដែល $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ ។

101. ប្រើរូបមន្ត (14) និង $\mathcal{L}\{\sin kt\}=\dfrac{k}{s^2+k^2}$ ដើម្បីទាញរកតម្លៃ $\mathcal{L}\{\cos kt\}$ ។

102. ប្រើរូបមន្ត (14) ដើម្បីទាញរកតម្លៃ $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}$ ។

103. ប្រើរូបមន្ត (15) ដើម្បីទាញរកតម្លៃ $\mathcal{L}\{\cos kt\}$ ។

104. ប្រើរូបមន្ត (15) និង $\mathcal{L}\{1\}=\dfrac{1}{s}$ ដើម្បីទាញរកតម្លៃ $\mathcal{L}\left\{t^2\right\}$ ។

105. គណនា $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos x\,dx\right\}$ ។

106. គណនា $\mathcal{L}\left\{\int_0^t x\,dx\right\}$ ។

ប្រើរូបមន្ត (18) ដើម្បីកំណត់ f(t) ចំពោះអនុគមន៍ F(s) ដែលឱ្យខាងក្រោម:

107. $\dfrac{1}{s(s^2+9)}$ 108. $\dfrac{1}{s(s-2)}$ 109. $\dfrac{1}{(s^2+2s)}$

110. $\dfrac{1}{s^2+3s}$ 111. $\dfrac{1}{s^3-9s}$ 112. $\dfrac{2}{s(s^2+2)}$ ។

ប្រើវិធីបម្លែងឡាប្លាសក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើមនីមួយៗខាងក្រោម:

113. $y'+3y=0, \quad y(0)=2$

114. $y'-4y=0, \quad y(0)=-1$

115. $x''(t)+9x(t)=0, \quad x(0)=3, \ x'(0)=0$

116. $y''+4y=0, \quad y(0)=1, \ y'(0)=1$

117. $\ddot{x}-2\dot{x}=0, \quad x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=-2$

118. $y''+3y'+2y=0, \quad y(0)=0, \ y'(0)=-2$

119. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}-6x=0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=1$

120. $\dot{x}+2x=4, \quad x(0)=0$

121. $y'-y=e^{2t}, \quad y(0)=2$

122. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4y=1, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$

123. $y''-y=10, \quad y(0)=0, \ y'(0)=-2$

124. $y''-2y'=-4, \quad y(0)=0, \ y'(0)=0$

125. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}=2, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=-2$

126. $\dfrac{dx}{dt}-3x=\sin 2t, \quad x(0)=2$

127. $y'+4y=\cos 3t, \quad y(0)=0$

128. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}-2x=-4,\quad x(0)=2,\quad x'(0)=3$

129. $3\ddot{x}+6\dot{x}+3x=9,\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=6$

130. $y''-6y'+9y=te^{3t},\quad y(0)=3,\ y'(0)=2$

131. $y'+3y=e^{-t}\sin t,\quad y(0)=1$

132. $y'+2y=e^{-2t}\cos 2t,\quad y(0)=1$

133. $y''+2y'=e^{-t}\cos t,\quad y(0)=0,\ y'(0)=0$ ។

134. កំណត់ចរន្តអគ្គិសនីនៅក្នុងបណ្តុំជាស៊េរីនៃសៀគ្វី RC បើសិនតង់ស្យុងចរន្តគឺ $v=e^{-2t}$ ចំពោះ $t\geq 0$ ហើយបន្ទុកដើមលើកុងដង់សាទ័រស្មើសូន្យ (សូមមើលរូបទី៨ ទំព័រទី២៥) ។

135. កំណត់ចរន្តអគ្គិសនីរត់នៅក្នុងសៀគ្វី RC ដោយបណ្តុំជាស៊េរីដែលមាន $R=5,\ C=1$ និង $v=3t$ ។ គេសន្មតថា $q(0)=0$ ។

ប្រើទ្រឹស្តីបទទី៥ ដើម្បីរកបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ដែលឱ្យខាងក្រោម:

136. $t\cos kt$ 137. $t^2\cos kt$ 138. t^2e^{2t}

139. t^4e^{3t} 140. t^ne^{kt}, n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

141. $t\sin t\cos t$ 142. $\sin kt-t\cos kt$ 143. $t\sin^2 t$

144. $t^2(\sin kt+\cos kt)$ 145. $t^2\sinh kt$ 146. $t^2e^{3t}\sin 5t$

147. $te^{3t}\cos^2 4t$ ។

ប្រើសមីការទី (20) ដើម្បីរក $f(t)$ ចំពោះបម្លែងឡាប្លាសដែលគេឱ្យខាងក្រោម:

148. $\ln\left(\dfrac{s+1}{s-1}\right)$ 149. $\ln\left(\dfrac{s-2}{s-1}\right)$ 150. $\ln\left(1-\dfrac{5}{s}\right)$

151. $\ln\left(\dfrac{s-3}{s-1}\right)$ 152. $\ln\left(\dfrac{s^2}{s^2+4}\right)$ 153. $\ln\left(\dfrac{s^2+4}{s^2+1}\right)$

154. $\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}(s+4)$ 155. $\cot^{-1}s$ 156. $\tan^{-1}\left(\dfrac{2}{s}\right)$

157. $\cot^{-1}(3s)$ ។

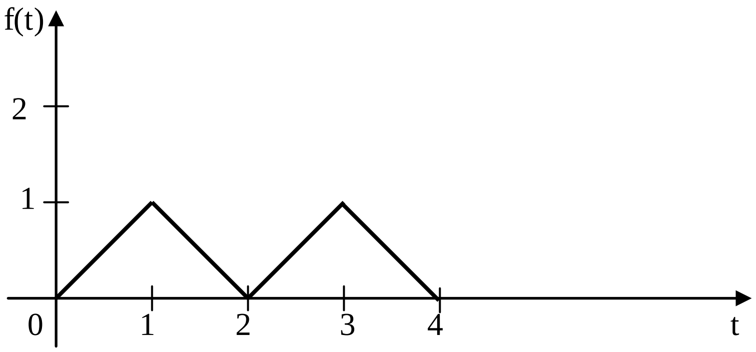
158. ប្រើរូបមន្ត (21) ដើម្បីរកតម្លៃ $\mathcal{L}\{\sin t\}$ ។

159. ប្រើរូបមន្ត (21) ដើម្បីរកតម្លៃ $\mathcal{L}\{\cos 3t\}$ ។

គណនាបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ដែលគេឱ្យដូចតទៅ:

160. រលកត្រីកោណដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី២២ និងមានសមីការ:

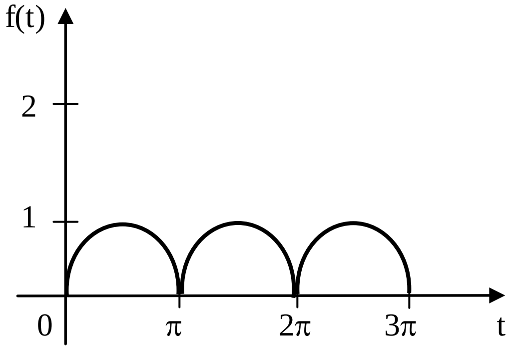
$$f(t)=\begin{cases} t\,, & 0\le t<1 \\ 2-t\,, & 1\le t<2 \end{cases}$$ និង $f(t) = f(t + 2)$ ។



រូបទី២២

161. កំណែតម្រូវរលកពេញនៃរលកស៊ីនុសដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី២៣ និងមានសមីការ:

$f(t)=\sin t,\quad 0\le t<\pi$ និង $f(t) = f(t + \pi)$ ។



រូបទី២៣

162. $f(t) = |\cos kt|$

163. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} \le t < L \end{cases}$ និង $f(t) = f(t + L)$

164. $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2, \\ -2, & 2 < t < 3 \end{cases} \quad f(t) = f(t+3)$

165. $f(t) = e^{t} \cdot \big($រលកចតុកោណកែងដែលបានបង្ហាញក្នុងរូបទី១១$\big)$

166. $f(t) = e^{t} \cdot \big($រលកជណ្ដើរដែលបានបង្ហាញក្នុងរូបទី១២$\big)$

167. អនុគមន៍មានក្រាបស្រដៀងគ្នានឹងរលកចតុកោណកែងដែលបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបទី១១ ប៉ុន្តែវាមានអំព្លីទុត h, ខួប p និងបម្លាស់ទីទៅខាងលើ k ឯកតា។

រកបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ចម្លើយរបស់ចំណោទតម្លៃដើម $y'' + 4y' + 3y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$ ចំពោះអនុគមន៍បើកបរ (Driving Function) ដែលឱ្យខាងក្រោម:

168. f(t) = ទម្រង់រលកនៅក្នុងរូបទី៩។

169. f(t) = ទម្រង់រលកនៅក្នុងរូបទី១0។

170. f(t) = ទម្រង់រលកនៅក្នុងរូបទី១១។

171. f(t) = ទម្រង់រលកនៅក្នុងរូបទី១២។

គណនាបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម:

172. $\int_0^t (t-u)\sin 2u \, du$

173. $\int_0^t e^{-(t-u)} \cos u \, du$

174. $2 * e^{3t}$

175. $t * \cos t$

176. $t^3 * \sin t$

177. $e^{t} * t$ ។

ប្រើទ្រឹស្តីបទកុងវ៉ូលុយស្យុង ដើម្បីរកបម្លែងឡាប្លាសច្រាសនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម:

178. $\frac{1}{s(s^2+4)}$ 179. $\frac{1}{s^2(s-1)}$ 180. $\frac{3}{2s(s^2+9)}$

181. $\frac{1}{s(s-2)}$ 182. $\frac{1}{s^2(s+3)}$ 183. $\frac{3}{s(s^2+2)}$

184. $\frac{2}{s^2+s-6}$ 185. $\frac{1}{s^2+3s+2}$ 186. $\frac{1}{(s^2+1)^2}$

187. $\frac{s}{(s^2+1)^2}$ ។

188. ដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម: $y''+2y'+y=f(t), \quad y(0)=y'(0)=0$

បន្ទាប់មកទាញរកចម្លើយចំពោះ $f(t) = 5$ ។

189. ដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម: $y''+3y'+2y=f(t), \quad y(0)=y'(0)=0$

បន្ទាប់មកទាញរកចម្លើយចំពោះ $f(t) = \sin t$ ។

ដោះស្រាយសមីការនីមួយៗខាងក្រោម:

190. $y(t)=1+\int_0^t y(u)\sin(t-u)\,du$

191. $y(t)=\sin t+\int_0^t \sin(t-u)\,y(u)\,du$

192. $y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(u)\,du=1, \quad y(0)=0$

193. $y(t)=t+4\int_0^t (u-t)^2\,y(u)\,du$

194. $y(t)=t^2-2\int_0^t y(t-u)\sinh 2u\,du$

195. $y(t)=t+\int_0^t y(t-u)\,e^{-u}\,du$

196. $y(t)=t+2\int_0^t \cos(t-u)\,y(u)\,du$

197. បង្ហាញថា $f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$ ។

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ដែលបានឱ្យខាងក្រោម ចំពោះ $t\ge 0$:

198. $u_3(t)$
199. $u_5(t)-u_7(t)$
200. $u_0(t)-u_3(t)$
201. $t\,u_2(t)$
202. $t\left[u_1(t)-u_2(t)\right]$
203. $(t^2-4)\,u_2(t)$
204. $u_1(t)-3u_4(t)-4u_5(t)$
205. $u_\pi(t)\sin t$
206. $u_\pi(t)\sin(t-\pi)$

សរសេរអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាអនុគមន៍នៃអនុគមន៍ជំហានឯកតា:

207. $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<2\\ t, & t>2\end{cases}$
208. $f(t)=\begin{cases}5, & 0<t<3\\ 2t-1, & t>3\end{cases}$
209. $f(t)=\begin{cases}t^2, & 0<t<4\\ 0, & t>4\end{cases}$
210. $f(t)=\begin{cases}e^{-t}, & 0<t<2\\ 0, & t>2\end{cases}$ ។

គណនា f(t) និងសង់ក្រាបវាផង។

211. $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}-\dfrac{e^{-2s}}{s}\right\}$
212. $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2e^{-3s}}{s}\right\}$
213. $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3e^{-s}}{s}-\dfrac{e^{-2s}}{s}\right\}$
214. $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}(e^{-2s}+3e^{-5s})\right\}$ ។

សរសេរអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាអនុគមន៍នៃអនុគមន៍ជំហានឯកតា និងគណនាបម្លែងឡាប្លាសវាផង:

215. $f(t)=\begin{cases}2, & 0<t<1\\ t, & t>1\end{cases}$
216. $f(t)=\begin{cases}3, & 0<t<2\\ t+1, & t>2\end{cases}$
217. $f(t)=\begin{cases}e^{-t}, & 0<t<3\\ 0, & t>3\end{cases}$
218. $f(t)=\begin{cases}\sin 3t, & 0<t<\pi\\ 0, & t>\pi\end{cases}$ ។

គណនាបម្លែងឡាប្លាសច្រាសនៃអនុគមន៍ដែលគេឱ្យ។ ចូរសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍នៃ t ។

219. $\dfrac{e^{-3s}}{s^2}$
220. $\dfrac{e^{-4s}-e^{-s}}{s^3}$
221. $\dfrac{e^{-s}}{s^2+4}$

222. $\dfrac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)}$ 223. $\dfrac{1}{(s+a)(1+e^{-ks})}$ 224. $\dfrac{1}{(s+1)^2(1-e^{-s})}$ ។

គណនាបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម:

225. $t\,u_2(t)$ 226. $t^2\,u_3(t)$ 227. $\cos t\,u_\pi(t)$

228. $(t-3)^2\,u_2(t)$ 229. $e^t\,u_3(t)$ ។

230. ដោយប្រើវិធីបម្លែងឡាប្លាស ចូរដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម:

$$x'(t)+2x(t)=f(t),\quad x(0)=0 \quad \text{ដែល } f(t)=\begin{cases} 2, & 0<t<2 \\ t, & t>2 \end{cases}$$ ។

231. ដោយប្រើវិធីបម្លែងឡាប្លាស ចូរដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម:

$$y''(t)+2y'(t)=\phi(t),\quad y(0)=0,\ y'(0)=3 \quad \text{ដែល } \phi(t)=\begin{cases} 4, & 0<t<1 \\ 0, & t>1 \end{cases}$$ ។

232. រកសមីការផ្ទុកបន្ទុកអគ្គិសនីធៀបនឹងពេលនៅក្នុងបង្គុំជាស៊េរីនៃសៀគ្វី RC ប្រសិនបើ $R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{1}{C}q=v(t)$ និង $v(t)$ កំណត់ដោយ:

$$v(t)=\begin{cases} E, & 0<t<T \\ 0, & t>T \end{cases}$$ ។

គេសន្មតថា $q(0) = 0$ ។

233. ដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើម:

$$y''-y'=t\left[u_0(t)-u_2(t)\right],\quad y(0)=0,\ y'(0)=0$$ ។

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

កំណែលំហាត់មួយចំនួន

☞ រកតម្លៃបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមដោយប្រើលក្ខណៈលីនេអ៊ែរ និងតារាងទី១:

1. $\mathcal{L}\{t^3\} = \dfrac{3!}{s^{3+1}} = \dfrac{6}{s^4} \quad (s > 0)$ ។

5. $\mathcal{L}\{e^{-2t} + 4e^t\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\} + 4\,\mathcal{L}\{e^t\}$

$$= \frac{1}{s-(-2)} + 4\frac{1}{s-1} \qquad (s > -2,\ s > 1)$$

$$= \frac{1}{s+2} + \frac{4}{s-1} = \frac{s-1+4s+8}{(s-1)(s+2)}$$

$$= \frac{5s+7}{(s-1)(s+2)} \qquad (s > 1)$$ ។

9. $\mathcal{L}\{e^{3t} + \sin 3t\} = \mathcal{L}\{e^{3t}\} + \mathcal{L}\{\sin 3t\}$

$$= \frac{1}{s-3} + \frac{3}{s^2+3^2} \qquad (s > 3,\ s > 0)$$

$$= \frac{s^2+9+3s-9}{(s-3)(s^2+9)}$$

$$= \frac{s^2+3s}{(s-3)(s^2+9)} \qquad (s > 3)$$ ។

13. $\mathcal{L}\{2te^{-t} + e^{-t}\} = 2\,\mathcal{L}\{te^{-t}\} + \mathcal{L}\{e^{-t}\}$

$$= 2\frac{1!}{(s+1)^{1+1}} + \frac{1}{s-(-1)} \qquad (s > -1)$$

$$= \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} = \frac{2+s+1}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{s+3}{(s+1)^2} \qquad (s > -1)$$ ។

17. $\mathcal{L}\{(1-e^{\frac{t}{2}})^2\} = \mathcal{L}\{1 - 2e^{\frac{t}{2}} + (e^{\frac{t}{2}})^2\}$

$$= \mathcal{L}\{1\} - 2\mathcal{L}\{e^{\frac{t}{2}}\} + \mathcal{L}\{e^{t}\}$$

$$= \frac{1}{s} - 2\cdot\frac{1}{s-\frac{1}{2}} + \frac{1}{s-1} \qquad (s>0,\ s>\tfrac{1}{2},\ s>1)$$

$$= \frac{1}{s(s-1)(2s-1)} \qquad (s>1)$$ ។

21. បង្ហាញថា $\mathcal{L}\{\sin kt \cos kt\} = \dfrac{k}{s^2+4k^2} \quad (s>0)$ ។

យើងមានរូបមន្ត

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$\Rightarrow \qquad \sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ និង $\sin kt \cos kt = \dfrac{1}{2}\sin 2kt$ ។

យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{\sin kt \cos kt\} = \mathcal{L}\{\frac{1}{2}\sin 2kt\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin 2kt\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2k)}{s^2+(2k)^2} \quad (s>0)$$ (ប្រើរូបមន្ត (5))

$$= \frac{k}{s^2+4k^2}$$ ពិត ។

25. បង្ហាញថា g(t) ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើចន្លោះ $t \geq 0$ ។

យើងមាន:

$$g(t) = \begin{cases} t+2, & 0 \leq t < 1 \\ 5, & t > 1 \end{cases}$$ ។

យើងឃើញថា g ជាប់លើចន្លោះរងបើក $0 < t < 1$ និង $t > 1$ ។

ដោយ $$\lim_{t\to 1^-} g(t) = \lim_{t\to 1^-}(t+2) = 3$$

និង $$\lim_{t\to 1^+} g(t) = \lim_{t\to 1^+}(5) = 5$$

នោះ g ជាប់ដោយដុំៗលើ $[0, +\infty[$ ។

29. បង្ហាញថា f(t) ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើចន្លោះ $t \ge 0$ ។

យើងមាន: $f(t) = \dfrac{\cos t - 1}{t}$ ។

ដោយ f(0) មិនកំណត់ នោះ f ជាអនុគមន៍មិនជាប់ត្រង់ $t = 0$ ។

ប៉ុន្តែ
$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos t - 1}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{-2\sin^2 \frac{t}{2}}{t}$$
$$= -\lim_{t\to 0^+}\left[\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)\cdot \sin\frac{t}{2}\right] = 0 \text{ ។}$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើ $[0, +\infty[$ ។

33. រកបម្លែងឡាប្លាសនៃ f(t) ។

យើងមាន:
$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 4 \\ 4, & t > 4 \end{cases} \text{ ។}$$

យើងបែងចែកអាំងតេក្រាលជាពីរផ្នែក មួយផ្នែកសម្រាប់ចន្លោះ $0 \le t < 4$ និងមួយផ្នែកទៀតសម្រាប់ចន្លោះ $t > 4$ ។ ដូចនេះ

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^4 e^{-st}[t]\,dt + \int_4^\infty e^{-st}[4]\,dt$$
$$= -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^4 + \frac{1}{s}\int_0^4 e^{-st}dt + 4\lim_{b\to+\infty}\int_4^b e^{-st}\,dt$$
$$= -\frac{4}{s}e^{-4s} + \frac{1}{s}(-\frac{1}{s})e^{-st}\Big|_0^4 + 4\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_4^b\right)$$
$$= -\frac{4}{s}e^{-4s} - \frac{1}{s^2}e^{-4s} + \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-sb} - e^{-4s}\right)$$
$$= -\frac{4}{s}e^{-4s} - \frac{1}{s^2}e^{-4s} + \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s}\left(0 - e^{-4s}\right) \quad \text{បើ } s > 0$$

$$= \frac{1-e^{-4s}}{s^2} \quad \text{បើ } s>0 \text{ ។}$$

37. រកបម្លែងឡាប្លាសនៃ f(t) ។

យើងមាន:

$$f(t) = \begin{cases} e^t\,, & 0 \le t < 2 \\ 0\,, & t > 2 \end{cases} \text{ ។}$$

តាមនិយមន័យនៃបម្លែងឡាប្លាស គេបាន:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^2 e^{-st}[e^t]\,dt + \int_2^\infty e^{-st}[0]\,dt$$

$$= \int_0^2 e^{(1-s)t}\,dt$$

$$= \left.\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\right|_0^2 = \frac{e^{2(1-s)}-1}{1-s} \text{ ។}$$

41. បង្ហាញថា f(t) = $\sqrt{t}$ ជាអនុគមន៍មានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

បើ a ជាចំនួនថេរធំជាងសូន្យ និងប្រើរូបមន្ត L’hôpital នោះយើងបាន:

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)|e^{-at} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^{at}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\sqrt{t})'}{(e^{at})'}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2a\sqrt{t}\,e^{at}} = 0 \text{ ។}$$

ដូចនេះ f(t) ជាអនុគមន៍មានលំដាប់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

45. ចំពោះអនុគមន៍ g(t) = t sin 2t

ដូចគ្នាដែរ បើ a ជាចំនួនថេរធំជាងសូន្យ នោះយើងបាន:

$$\lim_{t\to\infty} |g(t)|e^{-at} = \lim_{t\to\infty} \frac{t\sin 2t}{e^{at}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\sin 2t}{2t} \cdot \frac{2t^2}{e^{at}}$$

$$= (1) \lim_{t\to\infty} \frac{2t^2}{e^{at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(2t^2)'}{(e^{at})'}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{4t}{a\,e^{at}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(4t)'}{(a\,e^{at})'}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{4}{a^2 e^{at}} = 0 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $g(t)$ ជាអនុគមន៍មានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

50. បង្ហាញថាអនុគមន៍ទាល់ទាំងអស់មានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

តាង $f(t)$ ជាអនុគមន៍ទាល់លើ $\mathbb{R}$ ណាមួយនោះ

$$\exists M > 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \ |f(t)| < M$$

បើ a ជាចំនួនថេរធំជាងសូន្យ គេបាន: $e^{-at} > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ហើយ $0 < |f(t)| e^{-at} < M\, e^{-at}$

នាំឱ្យ $0 < \lim_{t\to\infty} |f(t)| e^{-at} < \lim_{t\to\infty} (M\, e^{-at}) = 0$

មានន័យថា $\lim_{t\to\infty} |f(t)| e^{-at} = 0$ ។

ដូចនេះ $f(t)$ មានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

54. បង្ហាញថា $\lim_{s\to\infty} s\,F(s)$ ជាចំនួនកំណត់។

ដោយ f និង f' ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗ និងមានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល នោះយើងបានរូបមន្តទី (14) គឺ:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

នាំឱ្យ $s\,F(s) = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\} + f(0)$ ។

ដោយ f' ជាអនុគមន៍ជាប់ដោយដុំៗលើ $[0, \infty)$ និងមានលំដាប់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល នោះតាមកូរ៉ូលែរ ១ យើងបាន:

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f'(t)\} = 0$$

នាំឱ្យ $\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty}\left[\mathcal{L}\{f'(t)\} + f(0)\right]$

ឬ $\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$ ជាចំនួនកំណត់។

☞ គណនាបម្លែងឡាប្លាសច្រាសដូចតទៅ:

59. តាមលក្ខណៈលីនេអ៊ែរ យើងបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+2}{s^2+1}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1^2}\} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1^2}\}$$

$$= \cos t + 2\sin t \quad (\text{ ប្រើតារាងទី១ })\text{ ។}$$

62. ដោយប្រើតារាងទី១ យើងបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s-3)^5}\} = \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4!}{(s-3)^{4+1}}\}$$

$$= \frac{1}{12}t^4 e^{3t} \text{ ។}$$

66. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1}{s^2+4s-5}\}$

កន្សោមភាគបែងអាចដាក់ជាផលគុណកត្តា

$$s^2+4s-5 = (s-1)(s+5) \text{ ។}$$

យើងនឹងសរសេរកន្សោមឡាប្លាសច្រាស ជាប្រភាគដោយផ្នែក

$$\frac{s+1}{s^2+4s-5} = \frac{s+1}{(s-1)(s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+5}$$

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរដែលត្រូវកំណត់។ ពីការតម្រូវភាគបែងឱ្យដូចគ្នា គេទទួលបាន:

$$s+1 \equiv A(s+5) + B(s-1) \text{ ។}$$

– បើ $s = 1$ យើងបាន : $2 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$ ។

– បើ $s = -5$ យើងបាន : $-4 = -6B \Rightarrow B = \frac{2}{3}$ ។

នាំឱ្យ

$$\frac{s+1}{s^2+4s-5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+5}$$ ។

ដូចនេះ $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1}{s^2+4s-5}\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+5}\}$

$$=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}+\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+5}\}$$

$$=\frac{e^t}{3}+\frac{2e^{-5t}}{3}$$ (ប្រើតារាងទី១) ។

70. ដោយប្រើតារាងទី១ យើងបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+4)^3}\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2!}{[s-(-4)]^{2+1}}\}$$

$$=\frac{1}{2}t^2e^{-4t}$$ ។

74. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2(s^2+1)}{s^3+2s}\}$

យើងសរសេរកន្សោមឡាប្លាសច្រាស ជាប្រភាគដោយផ្នែក

$$\frac{2(s^2+1)}{s^3+2s}=\frac{2s^2+2}{s(s^2+2)}$$

$$=\frac{(s^2+2)+s^2}{s(s^2+2)}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+2}$$

នាំឱ្យ

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2(s^2+1)}{s^3+2s}\}=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+2}\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}+\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+2}\}$$

$$=1+\cos(\sqrt{2}\,t)$$ ។

☞ ប្រើទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ ដើម្បីរកបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ដែលគេឱ្យខាងក្រោម:

78. $t^2 e^{2t}$

ដោយ $\mathcal{L}\{t^2\} = \dfrac{2!}{s^{2+1}} = \dfrac{2}{s^3} \quad (s > 0)$

និងតាមទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{2t}\} = \frac{2}{(s-2)^3} \quad \text{បើ } s > 2 \text{ ។}$$

82. $e^{2t}\sin 3t \cos 3t = \dfrac{1}{2} e^{2t} \sin 6t$

តាមតារាងទី១ យើងមាន:

$$\mathcal{L}\{\sin 6t\} = \frac{6}{s^2 + 6^2} = \frac{6}{s^2 + 36} \quad (s > 0) \text{ ។}$$

តាមទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\sin 3t \cos 3t\} = \mathcal{L}\{\tfrac{1}{2} e^{2t} \sin 6t\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{2t}\sin 6t\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{(s-2)^2 + 36}$$

$$= \frac{3}{(s-2)^2 + 36} \qquad \text{បើ } s > 2 \text{ ។}$$

86. $e^t \cdot g(t)$ ដែល $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 2, & t \ge 2 \end{cases}$

យើងមាន:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^2 e^{-st}[t]\,dt + \int_2^{\infty} e^{-st}[2]\,dt$$

$$= -\frac{t}{s} e^{-st}\Big|_0^2 + \frac{1}{s}\int_0^2 e^{-st} dt + 2\lim_{b \to +\infty} \int_2^b e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{2}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}(-\frac{1}{s})e^{-st}\Big|_0^2 + 2\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_2^b\right)$$

$$= -\frac{2}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-sb} - e^{-2s}\right)$$

$$= -\frac{2}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\left(0 - e^{-2s}\right) \quad \text{បើ } s > 0$$

$$= \frac{1-e^{-2s}}{s^2} \quad \text{បើ } s > 0 \text{ ។}$$

តាមទ្រឹស្តីបទរំកិលទី១ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{e^t g(t)\} = \frac{1-e^{-2(s-1)}}{(s-1)^2} \quad \text{បើ } s > 1 \text{ ។}$$

☞ គណនាបម្លែងឡាប្លាសច្រាសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

90. $\dfrac{1}{s^2+3s+3}$

យើងមាន:

$$s^2+3s+3 = s^2 + 2\cdot\tfrac{3}{2}s + (\tfrac{3}{2})^2 + 3 - (\tfrac{3}{2})^2$$

$$= (s+\tfrac{3}{2})^2 + (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2 \text{ ។}$$

ដោយ $\mathcal{L}\{\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{s^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$ បើ $s > 0$ (តាមតារាងទី១)

នាំឱ្យ $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{s^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\} = \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$ ។

បើគេយក s ជំនួសដោយ $s+\frac{3}{2}$ និងតាមរូបមន្ត (13) យើងបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+3s+3}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{3}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \text{ ។}$$

94. $\dfrac{s}{s^2+2s+5} = \dfrac{s}{(s+1)^2+2^2}$

តាមតារាងទី១ យើងបាន: $\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \dfrac{s}{s^2+2^2}$ បើ $s > 0$

និង $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \dfrac{2}{s^2+2^2}$

នាំឱ្យ $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{s}{s^2+2^2}\} = \cos 2t$ និង $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{2}{s^2+2^2}\} = \sin 2t$ ។

បើគេយក s ជំនួសដោយ $s+1$ និងតាមរូបមន្ត (13) យើងបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+2s+5}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+2^2}\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\}$$

$$= e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \text{ ។}$$

98. $\dfrac{1}{s(s+1)(s^2+4s+5)}$

យើងនឹងសរសេរកន្សោមខាងលើ ជាប្រភាគដោយផ្នែកគឺ:

$$\frac{1}{s(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+5}$$

$$= \frac{A(s+1)(s^2+4s+5) + Bs(s^2+4s+5) + s(s+1)(Cs+D)}{s(s+1)(s^2+4s+5)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \equiv A(s+1)(s^2+4s+5) + Bs(s^2+4s+5) + s(s+1)(Cs+D)$$

$$\equiv (A+B+C)s^3 + (5A+4B+D+C)s^2 + (9A+5B+D)s + 5A \text{ ។}$$

ដោយផ្ទឹមមេគុណនៃពហុធា យើងបាន:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+D+C=0 \\ 9A+5B+D=0 \\ 5A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{5} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{3}{10} \\ D=\frac{7}{10} \end{cases}$$

នាំឱ្យ

$$\frac{1}{s(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{1}{5s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{3s+7}{10(s^2+4s+5)}$$

$$= \frac{1}{5s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{3(s+2)+1}{10[(s+2)^2+1^2]}$$

$$= \frac{1}{5s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{3}{10}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1^2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1^2}$$

ដោយប្រើតារាងទី១ និងរូបមន្ត (13) យើងបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s+1)(s^2+4s+5)}\}$$
$$= \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} + \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1^2}\} + \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{10}e^{-2t}\cos t + \frac{1}{10}e^{-2t}\sin t \text{ ។}$$

102. ប្រើរូបមន្ត (14) ដើម្បីទាញរកតម្លៃ $\mathcal{L}\{e^{at}\}$ ។

យើងតាង $f(t)=e^{at}$ នោះគេបាន:

$f'(t)=a e^{at}$ និង $f(0)=e^0=1$ ។

ដោយប្រើសមីការ (14) យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{a e^{at}\} = s\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1$$

$$\Leftrightarrow (s-a)\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1$$

$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$ បើ s > a ។

106. គណនា $\mathcal{L}\left\{ \int_0^t x \, dx \right\}$ ។

តាង f(x) = x និងតាមរូបមន្ត (17) យើងបាន:

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t x \, dx \right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{ f(t) \} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{ t \}$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^3} \quad \text{បើ } s > 0 \text{ ។}$$

110. ប្រើរូបមន្ត (18) ដើម្បីកំណត់ f(t) ចំពោះអនុគមន៍ $F(s) = \dfrac{1}{s^2+3s}$ ។

តាមរូបមន្ត (18) យើងអាចកំណត់ f(t) គឺ:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ F(s) \} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+3s} \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+3} \right\}$$

$$= \int_0^t e^{-3x} \, dx$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^t$$

$$= -\frac{1}{3}\left(e^{-3t} - 1\right) \text{ ។}$$

☞ ប្រើវិធីបម្លែងឡាប្លាសក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាតម្លៃដើមនីមួយៗខាងក្រោម:

114. $y' - 4y = 0, \quad y(0) = -1$

ការធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងសងខាងរបស់សមីការដែលឱ្យ បានផ្តល់ឱ្យ

$$\mathcal{L}\{ y' - 4y \} = \mathcal{L}\{ -1 \}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\{ y' \} - 4\mathcal{L}\{ y \} = -\frac{1}{s} \qquad (s > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\{ y' \} = 4\mathcal{L}\{ y \} - \frac{1}{s} \text{ ។}$$

តាង $Y(s) = \mathcal{L}\{ y(t) \}$ និងប្រើរូបមន្ត (14) យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{ y'(t) \} = s\mathcal{L}\{ y(t) \} - y(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4Y(s) - \frac{1}{s} = sY(s) - (-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (s-4)Y(s) = 1 - \frac{1}{s} = \frac{s-1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{s-1}{s(s-4)} = \mathcal{L}\{ y(t) \}$$

ដូចនេះ ចម្លើយរបស់សមីការគឺ:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s-1}{s(s-4)} \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\frac{1}{4}(s-4) + \frac{3}{4}s}{s(s-4)} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s-4} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}(1) + \frac{3}{4}e^{4t} = \frac{1+3e^{4t}}{4} \text{ ។}$$

118. $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -2$

យើងធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងសងខាងរបស់សមីការ យើងបាន:

$$\mathcal{L}(y'' + 3y' + 2y) = \mathcal{L}(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(y'') + 3\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = 0 \quad (*) \quad \text{(លក្ខណៈលីនេអ៊ែរ)}$$

ប៉ុន្តែតាមសមីការ (14) និង (15) គឺ:

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0) = s\mathcal{L}(y)$$

និង $$\mathcal{L}(y'') = s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}(y) + 2$$

នោះសមីការ (*) អាចសរសេរ

$$s^2\mathcal{L}(y)+2+3s\mathcal{L}(y)+2\mathcal{L}(y)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad (s^2+3s+2)\mathcal{L}(y)=-2$$

$$\Leftrightarrow\quad \mathcal{L}(y)=-\frac{2}{s^2+3s+2}$$

$$=-\frac{2}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+2}-\frac{2}{s+1}\text{ ។}$$

តាមលក្ខណៈបម្លែងច្រាស យើងបានចម្លើយរបស់សមីការៈ

$$y=y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+2}-\frac{2}{s+1}\right\}$$

$$=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$=2e^{-2t}-2e^{-t}\text{ ។}$$

122. $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4y=1,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$

យើងធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងពីររបស់សមីការដែលឱ្យ យើងបានៈ

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+4y\right)=\mathcal{L}(1)$$

$$\Leftrightarrow\quad \mathcal{L}(y'')+4\mathcal{L}(y)=\frac{1}{s}\quad\text{បើ } s>0 \qquad (*)$$

ប៉ុន្តែតាមសមីការ (15) គឺៈ

$$\mathcal{L}(y'')=s^2\mathcal{L}(y)-sy(0)-y'(0)=s^2\mathcal{L}(y)$$

នោះសមីការ (*) អាចសរសេរ

$$s^2\mathcal{L}(y)+4\mathcal{L}(y)=\frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow\quad (s^2+4)\mathcal{L}(y)=\frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s(s^2+4)}$$

$$= \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)} \quad ។$$

តាមលក្ខណៈបម្លែងច្រាស យើងបានចម្លើយរបស់សមីការៈ

$$y = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+2^2} \right\}$$

$$= \frac{1-\cos 2t}{4} \quad ។$$

126. $\frac{dx}{dt} - 3x = \sin 2t, \quad x(0) = 2$

យើងធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងពីររបស់សមីការ យើងបានៈ

$$\mathcal{L}(\frac{dx}{dt} - 3x) = \mathcal{L}(\sin 2t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\{x'(t)\} - 3\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{2}{s^2+2^2} \quad \text{បើ } s > 0 \qquad (*)$$

ប៉ុន្តែតាមសមីការ (14) គឺៈ

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0) = s\mathcal{L}\{x(t)\} - 2$$

នោះសមីការ (*) អាចសរសេរ

$$s\mathcal{L}\{x(t)\} - 2 - 3\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{2}{s^2+4} \qquad (s > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (s-3)\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{2}{s^2+4} + 2$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{2s^2+10}{(s-3)(s^2+4)} \qquad (**)$$

កន្សោមខាងលើអាចសរសេរជាប្រភាគដោយផ្នែកគឺៈ

$$\frac{2s^2+10}{(s-3)(s^2+4)}=\frac{A}{s-3}+\frac{Bs+C}{s^2+4}$$

$$=\frac{A(s^2+4)+(Bs+C)(s-3)}{(s-3)(s^2+4)}$$

$$\Rightarrow\quad 2s^2+10\equiv A(s^2+4)+(Bs+C)(s-3)$$

$$\equiv (A+B)s^2+(C-3B)s+4A-3C \text{ ។}$$

ដោយផ្ទឹមមេគុណនៃពហុធា យើងបាន៖

$$\begin{cases}A+B=2\\ C-3B=0\\ 4A-3C=10\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=2-B=\frac{28}{13}\\ B=-\frac{2}{13}\\ C=3B=-\frac{6}{13}\end{cases}$$

នោះសមីការ (* *) អាចសរសេរជា៖

$$\mathcal{L}\{x(t)\}=\frac{2s^2+10}{(s-3)(s^2+4)}=\frac{28}{13(s-3)}+\frac{-\frac{2}{13}s-\frac{6}{13}}{s^2+4}$$

$$=\frac{28}{13(s-3)}-\frac{2}{13}\cdot\frac{s}{s^2+4}-\frac{6}{13}\cdot\frac{1}{s^2+4} \text{ ។}$$

តាមលក្ខណៈបម្លែងច្រាស យើងបានចម្លើយរបស់សមីការ៖

$$x=x(t)=\frac{28}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}-\frac{2}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}-\frac{6}{2\times 13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}$$

$$=\frac{28}{13}e^{3t}-\frac{2}{13}\cos 2t-\frac{3}{13}\sin 2t \text{ ។}$$

130. $y''-6y'+9y=te^{3t},\quad y(0)=3,\ y'(0)=2$

យើងធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងពីររបស់សមីការ យើងបាន៖

$$\mathcal{L}(y''-6y'+9y)=\mathcal{L}(te^{3t})$$

$$\Leftrightarrow\quad \mathcal{L}(y'')-6\mathcal{L}(y')+9\mathcal{L}(y)=\frac{1}{(s-3)^2}\quad \text{បើ } s>3 \qquad (*)$$

ប៉ុន្តែតាមសមីការ (14) និង (15) គឺ:

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0) = s\mathcal{L}(y) - 3$$

និង $$\mathcal{L}(y'') = s^2\mathcal{L}(y) - s\,y(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}(y) - 3s - 2$$

នាំឱ្យសមីការ (*) អាចសរសេរជា:

$$s^2\mathcal{L}(y) - 3s - 2 - 6[s\mathcal{L}(y) - 3] + 9\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s-3)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (s^2 - 6s + 9)\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s-3)^2} + 3s - 16$$

$$\Leftrightarrow \quad (s-3)^2\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s-3)^2} + 3(s-3) - 7$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s-3)^4} + \frac{3}{s-3} - \frac{7}{(s-3)^2}, \quad (s > 3) \text{ ។}$$

តាមលក្ខណៈនៃបម្លែងច្រាស យើងបានចម្លើយរបស់សមីការ:

$$y = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-3)^4} + \frac{3}{s-3} - \frac{7}{(s-3)^2}\}$$

$$= \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3!}{(s-3)^4}\} + 3\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} - 7\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1!}{(s-3)^2}\}$$

$$= \frac{1}{6}t^3 e^{3t} + 3e^{3t} - 7t\,e^{3t} \text{ ។}$$

134. កំណត់ចរន្តអគ្គិសនី $i(t)$ ។

តាមរូបមន្តទី 8 ទំព័រទី 25 និងតាមច្បាប់ Kirchhoff យើងបានសមីការសៀគ្វី:

$$R\,i + \frac{1}{C}\int_0^t i(x)\,dx = v(t) = e^{-2t} \qquad (*)$$

និង $q(0) = 0, \quad (t \geq 0)$ ។

ដោយធ្វើបម្លែងឡាប្លាសនៃអង្គទាំងពីររបស់សមីការ (*) យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{R\,i + \frac{1}{C}\int_0^t i(x)\,dx\} = v(t) = \mathcal{L}\{e^{-2t}\}$$

$$\Leftrightarrow \quad R\,\mathcal{L}\{i\}+\frac{1}{C}\,\mathcal{L}\{\int_0^t i(x)\,dx\}=\frac{1}{s-(-2)} \qquad \text{បើ } s>-2$$

$$\Leftrightarrow \quad R\,\mathcal{L}\{i\}+\frac{1}{CS}\,\mathcal{L}\{i(x)\}=\frac{1}{s+2}$$

នាំឱ្យ

$$\mathcal{L}\{i(t)\}=\frac{sC}{(RCs+1)(s+2)}=\frac{1}{R}\cdot\frac{s}{(s+\frac{1}{RC})(s+2)} \text{ ។}$$

សរសេរកន្សោមខាងលើទៅជាប្រភាគដោយផ្នែកគឺ:

$$\mathcal{L}\{i(t)\}=\frac{1}{R}\left[-\frac{1}{2RC-1}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}+\frac{2RC}{2RC-1}\cdot\frac{1}{s+2}\right]$$

$$=-\frac{1}{R(2RC-1)}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}+\frac{2C}{2RC-1}\cdot\frac{1}{s+2} \text{ ។}$$

តាមលក្ខណៈនៃបម្លែងឡាប្លាសច្រាស យើងបានសមីការចរន្ត $i(t)$ គឺ:

$$i(t)=-\frac{1}{R(2RC-1)}e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{2C}{2RC-1}e^{-2t} \text{ ។}$$

☞ ប្រើទ្រឹស្តីបទទី 5 ដើម្បីរកបម្លែងឡាប្លាសនៃអនុគមន៍ដែលឱ្យខាងក្រោម:

138. $t^2 e^{2t}$

តាមតារាងទី១ យើងមាន:

$$\mathcal{L}(e^{2t})=\frac{1}{s-2} \qquad \text{បើ } s>2$$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទទី 5 គេបាន:

$$\mathcal{L}\{t^2e^{2t}\}=\mathcal{L}\{(-t)^2e^{2t}\}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right)$$

$$=\frac{d}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right)\right]=\frac{d}{ds}\left[-(s-2)^{-2}\right]$$

$$=\frac{2}{(s-2)^3} \qquad \text{ចំពោះ } s>2 \text{ ។}$$

142. $\sin kt - t\cos kt$

តាមតារាងទី១ យើងមាន:

$$\mathcal{L}(\sin kt) = \frac{k}{s^2+k^2} \quad \text{និង} \quad \mathcal{L}(\cos kt) = \frac{s}{s^2+k^2} \qquad \text{បើ } s > 0$$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទទី 5 យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{\sin kt - t\cos kt\} = \mathcal{L}\{\sin kt\} - \mathcal{L}\{t\cos kt\}$$

$$= \frac{k}{s^2+k^2} + \mathcal{L}\{(-t)^1 \cos kt)\}$$

$$= \frac{k}{s^2+k^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+k^2}\right)$$

$$= \frac{k}{s^2+k^2} + \frac{k^2-s^2}{(s^2+k^2)^2}$$

$$= \frac{k(s^2+k^2)+k^2-s^2}{(s^2+k^2)^2} \text{ ។}$$

146. $t^2 e^{3t} \sin 5t$

តាមតារាងទី១ យើងមាន:

$$\mathcal{L}(\sin 5t) = \frac{5}{s^2+5^2} \qquad \text{បើ } s > 0$$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទរំកិលទី 1 យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\sin 5t\} = \frac{5}{(s-3)^2+5^2}$$

$$= \frac{5}{s^2-6s+34} = 5(s^2-6s+34)^{-1} \text{ ។}$$

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទី 5 នាំឱ្យ

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\sin 5t\} = \mathcal{L}\{(-t)^2 e^{3t}\sin 5t\}$$

$$= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{5}{(s-3)^2+25}\right)$$

$$= 5\frac{d}{ds}\left[\frac{d}{ds}(s^2-6s+34)^{-1}\right]$$

$$= -5\frac{d}{ds}\left[(2s-6)(s^2-6s+34)^{-2}\right]$$

$$= -5\left[2(s^2-6s+34)^{-2} + (-2)(2s-6)^2(s^2-6s+34)^{-3}\right]$$

$$= \frac{-10}{(s^2-6s+34)^2} + \frac{10(2s-6)^2}{(s^2-6s+34)^3}$$

$$= \frac{10(3s^2-18s+2)}{(s^2-6s+34)^3} \text{ ។}$$

☞ ប្រើសមីការទី (20) ដើម្បីរក $f(t)$ ចំពោះបម្លែងឡាប្លាសដែលឱ្យខាងក្រោម៖

150. $\ln\left(1-\frac{5}{s}\right)$

ដោយប្រើសមីការទី (20) យើងបាន៖

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\}$$

$$= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\ln\left(1-\frac{5}{s}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left[\ln(s-5)-\ln s\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}-\frac{1}{s}\right\}$$

$$= -\frac{1}{t}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\right]$$

$$= \frac{1-e^{5t}}{t} \text{ ។}$$

154. $F(s)=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(s+4\right)$

តាមរូបមន្ត (20) យើងបាន:

$$f(t)=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(s+4\right)\right]\right\}$$

$$=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{\frac{d}{ds}(s+4)}{1+(s+4)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2+1^2}\right\} \qquad (*)$$

ប៉ុន្តែតាមតារាងទី១គឺ:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1^2}\right\}=\sin t$$

បើគេយក s ជំនួសដោយ s + 4 និងតាមរូបមន្ត (13) យើងបាន:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2+1^2}\right\}=e^{-4t}\sin t$$ ។

ពីសមីការ (*) យើងបានអនុគមន៍ f(t) គឺ:

$$f(t)=\frac{1}{t}e^{-4t}\sin t$$ ។

158. ប្រើរូបមន្ត (21) ដើម្បីរកតម្លៃ $\mathcal{L}\{\sin t\}$ ។

យើងមាន $f(t)=\sin t$ ជាអនុគមន៍ខួបដែលមានខួប $p=2\pi$ ។

តាមរូបមន្ត (21) យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi}e^{-st}\sin t\,dt \qquad (*)$$

តាង $I=\int_0^{2\pi}e^{-st}\sin t\,dt$ និង $J=\int_0^{2\pi}e^{-st}\cos t\,dt$ ។

យើងបាន:

$$J + iI = \int_0^{2\pi} e^{-st}(\cos t + i\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-st} e^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} e^{(i-s)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{i-s} e^{(i-s)t}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{i-s}\left[e^{2\pi(i-s)} - 1\right]$$

$$= -\frac{s+i}{s^2+1}\left[e^{-2\pi s} - 1\right]$$

$$= \frac{-s}{s^2+1}\left(e^{-2\pi s} - 1\right) + \frac{i}{s^2+1}\left(1 - e^{-2\pi s}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1} \text{ ។}$$

ពីសមីការ $(*)$ យើងបាន:

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left(\frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1} \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយតាមកម្មវិធី Maple 9.5

☞ យើងដោះស្រាយចំពោះឧទាហរណ៍មួយចំនួនលើបម្លែងឡាប្លាស និង បម្លែងឡាប្លាសច្រាសជាមួយកម្មវិធី Maple 9.5 ដូចតទៅ:

```
> restart;
> with(inttrans);
```

[*addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable*]

```
> # The Laplace Transform
> convert(laplace(f(t),t,s),int);
```

$$\int_0^{\infty} f(t)\, \mathbf{e}^{(-t\,s)}\, dt$$

```
> # Example 1
> convert(laplace(1,t,s),int);
```

$$\frac{1}{s}$$

```
> # Example 2
> convert(laplace(exp(k*t),t,s),int);
```

$$\frac{1}{s-k}$$

```
> # Example 3
convert(laplace(sin(k*t),t,s),int);
```

$$\frac{k}{s^2+k^2}$$

```
> # Example 4
> convert(laplace(t^n,t,s),int);
```

$$s^{(-n-1)}\,\Gamma(n+1)$$

```
> # Example 5
> convert(laplace(3*t+5*exp(-2*t),t,s),int);
```

$$\frac{3}{s^2}+\frac{5}{s+2}$$

```
> # Example 6
> convert(laplace((cos(3*t))^2,t,s),int);
```

$$\frac{18+s^2}{(s^2+36)\,s}$$

```
> # The inverse Laplace Transform
> # Example 11
> invlaplace(1/(s+2),s,t);
```

$$\mathbf{e}^{(-2\,t)}$$

```
> # Example 12
> invlaplace((2*s+1)/(s^2+4),s,t);
```

$$2\cos(2\,t)+\frac{1}{2}\sin(2\,t)$$

```
> # Example 13
> invlaplace((s+5)/(s^2-2*s-3),s,t);
```

$$2\,\mathbf{e}^{(3\,t)}-\mathbf{e}^{(-t)}$$

```
> # Example 14
> invlaplace(s^2/(s+1)^3,s,t);
```

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{(-t)}\,(2+t^2-4\,t)$$

```
> # Example 15
> invlaplace((9*s+14)/(s-2)*(s^2+4),s,t);
```

$$9\,\mathrm{Dirac}(2,t)+32\,\mathrm{Dirac}(1,t)+100\,\mathrm{Dirac}(t)+256\,\mathbf{e}^{(2\,t)}$$

```
> # Example 16 (a)
> convert(laplace(exp(t)*t^2,t,s),int);
```

$$\frac{2}{(s-1)^3}$$

```
> # Example 16 (b)
> convert(laplace(exp(3*t)*sin(t),t,s),int);
```

$$\frac{1}{s^2-6\,s+10}$$

```
> # Example 18
> invlaplace(3/((s-5)^2+9),s,t);
```

$$\mathbf{e}^{(5\,t)}\sin(3\,t)$$

```
> # Example 19
> invlaplace(1/(s^2+4*s+10),s,t);
```

$$\frac{1}{6}\sqrt{6}\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}\sin(\sqrt{6}\,t)$$

```
> # Example 20
```

```
> invlaplace(s/(s^2+6*s+13),s,t);
```

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{(-3\,t)}\,(2\cos(2\,t)-3\sin(2\,t))$$

```
> # Laplace transform
> with(inttrans):
> # Example 21
> laplace(sin(k*t),t,s);
```

$$\frac{k}{s^2+k^2}$$

```
> # Example 22
> laplace(t,t,s);
```

$$\frac{1}{s^2}$$

```
> # Example 23
> f(t):=invlaplace(1/(s*(s^2+4)),s,t);
```

$$f(t) := -\frac{1}{4}\cos(2\,t)+\frac{1}{4}$$

```
> # Example 29
> laplace(t*sin(k*t),t,s);
```

$$\frac{2\,s\,k}{(s^2+k^2)^2}$$

```
> # Example 30
> laplace(t^2*sin(k*t),t,s);
```

$$\frac{2\,k\,(3\,s^2-k^2)}{(s^2+k^2)^3}$$

```
> # Example 31
> f(t):=invlaplace(ln((s-2)/(s+2)),s,t);
```

$$f(t) := -\frac{2\sinh(2\,t)}{t}$$

```
> # Example 32
> f(t):=invlaplace(Pi/2-arctan(s),s,t);
```

$$f(t) := \frac{\sin(t)}{t}$$

☜ ✧ ✧ ✧ ☞

ឯកសារពិគ្រោះ

១ – Richard Bronson, ***Differential Equations***, New York, McGraw-Hill, Inc., Second Edition, 1994.

២ – Stanley J. Farlow, ***An Introduction to Differential Equations and Their Applications***, New York, McGraw-Hill, Inc., 1994.

៣ – Bernard J. Rice and Jerry D. Strange, ***Ordinary Differential Equations*** *with Applications*, California, Wadsworth, Inc., Second Edition, 1989.

៤– លោក ម៉ែន សុគន្ធ និង លោក អាស្លី អេវ៉ាន “ ***សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល*** ”, សាកលវិទ្យា–ល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ឆ្នាំ 2000 ។

៥ – Maplesoft, ***Maple 9.50***, a division of Waterloo Maple Inc., 2004.