អាំងតេក្រាលមួយប្រភេទមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

(One Type of Integral Involving Exponential Function)

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

មន្ត្រីស្រាវជ្រាវផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ

នៃវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា

សេចក្តីផ្តើម

លោកអ្នកសិក្សា និង អ្នកស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាបានស្គាល់រួចមកហើយអំពីទម្រង់អាំងតេក្រាលពិសេសៗមួយចំនួនដែលមាននៅក្នុងតារាងរូបមន្តអាំងតេក្រាល។ ឥឡូវនេះ លោកអ្នកនឹងស្គាល់រូបមន្តអាំងតេក្រាលថ្មីបន្ថែមទៀតដែលខ្ញុំនឹងបង្កើតឡើង។ ខ្ញុំបានស្រាវជ្រាវតាមអ៊ីនធឺណិត ក៏ប្រទះឃើញវេបសា http://www.sosmath.com/tables/integral/integ27/integ 27. html និង សៀវភៅពីរក្បាលគឺ Tables of Integrals and Other Mathematical Data , Student Mathematics Handbook and Integral Table for Calculus មានរូបមន្តអាំងតេក្រាលគឺ៖

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{p+qe^{ax}}=\frac{x}{p}-\frac{1}{ap}\ln(p+qe^{ax})+c$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{(p+qe^{ax})^2}=\frac{x}{p^2}+\frac{1}{ap(p+qe^{ax})}-\frac{1}{ap^2}\ln(p+qe^{ax})+c$

ហើយខ្ញុំគិតថា ខ្ញុំនឹងសិក្សាពង្រីកអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលខាងលើនេះទៅជាទម្រង់ទូទៅ $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(p+qa^{\alpha x}\right)^n}$ ដែល $a>0\,,\,a\neq1\,,\,\alpha\neq0\,,\,n\in\mathbb{N}$ និង

ដំណោះស្រាយរបស់វា។ ប៉ុន្តែដោយមានទំនាក់ទំនងរវាងគ្នា ជាដំបូង យើងនឹងដោះស្រាយអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលសិន។

អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx\ (a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $a^{\alpha x+\beta}\ (a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$ យើងប្រើវិធីប្តូរអថេរដោយតាង

$t=a^{\alpha x+\beta}\ (\alpha\neq 0)$ នាំឱ្យ $\ln t=\ln a^{\alpha x+\beta}=(\alpha x+\beta)\ln a\ (a>0\,,\,a\neq 1)$

នាំឱ្យ $x=\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{\ln t}{\ln a}-\beta\right)$ និង $dx=\dfrac{1}{\alpha\ln a}\cdot\dfrac{dt}{t}$ ។

នាំឱ្យ $\displaystyle\int a^{\alpha x+\beta}\,dx=\int t\frac{1}{\alpha\ln a}\frac{dt}{t}=\frac{1}{\alpha\ln a}\int dt$

$$=\frac{1}{\alpha\ln a}t+c=\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha\ln a}+c\quad(*)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $a=e\,,\,\alpha=1\,,\,\beta=0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជារូបមន្ត

$$\int e^{x}\,dx=e^{x}+c\quad(1)$$ [៩]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $\alpha=1\,,\,\beta=0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជារូបមន្ត

$$\int a^{x}\,dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c\quad(2)$$ [២]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $a=e$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int e^{\alpha x+\beta}\,dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}+c\quad(3)$$

---

[៩] Herbert Bristol Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data,* 1957, p. 126

[២] Herbert Bristol Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data,* 1957, p. 126

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ចំពោះករណីទូទៅ តាមសមីការ $(*)$ ផ្តល់ឱ្យ

$$\int a^{\alpha x+\beta}\,dx = \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha \ln a} + c \quad (4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0\,,\, a \neq 1$ ។

ឥឡូវនេះ យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^{+\infty} e^{a\,x}\,dx$ ។

តាមរូបមន្ត (3) និង $a \neq 0$ យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{a\,x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} e^{a\,x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a}e^{a\,x}\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a}\left(e^{a\,b}-1\right) \quad (*) \text{ ។}$$

ប្រសិនបើ $a = x + i\,y \in \mathbb{C}$ ដែល $\mathrm{Re}(a) = x < 0$ នាំឱ្យ

$$\lim_{b\to+\infty} e^{a\,b} = \lim_{b\to+\infty} e^{(x+i\,y)b} = \lim_{b\to+\infty} e^{xb+i\,yb}$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{\cos yb + i\sin yb}{e^{-xb}}$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{\cos yb}{e^{-xb}} + i\lim_{b\to+\infty}\frac{\sin yb}{e^{-xb}} = 0 + i\cdot 0 = 0$$

និងតាមសមីការ $(*)$ យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{a\,x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a}\left(e^{a\,b}-1\right) = \frac{1}{a}\left(0-1\right) = -\frac{1}{a}$$

ឬ $$\int_0^{+\infty} e^{a\,x}\,dx = -\frac{1}{a} \quad (5)$$

ដែល $\mathrm{Re}(a) < 0$ ។

យើងអាចទាញបាន

$$\int_0^{+\infty} e^{-a x}\,dx = \frac{1}{a} \quad (6)$$ [៣]

ដែល $-\mathrm{Re}(a)=\mathrm{Re}(-a)<0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(a)>0$ ។

អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}}$ $(a>0\,,\, a\neq 1\,,\, \alpha\neq 0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{p+q a^{\alpha x}}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}}$ យើងប្រើវិធីប្តូរអថេរដោយតាង $t=p+q a^{\alpha x}$ $(\alpha\neq 0)$ នាំឱ្យ $x=\frac{\ln(t-p)-\ln q}{\alpha \ln a}$ និង $dx=\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}$ ។

នាំឱ្យ $\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t-p} = \frac{1}{\alpha\ln a}\int \frac{1}{t(t-p)}dt \quad (*)$ ។

- បើ $p=0$ និង $q\neq 0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}} = \int \frac{dx}{q a^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha \ln a}\int \frac{1}{t^2}dt$$

$$= \frac{1}{\alpha\ln a}\int t^{-2}dt = \frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{t^{-1}}{(-1)}+c$$

$$= \frac{-1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{1}{t}+c = \frac{-1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{1}{q a^{\alpha x}}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0\,,\, a\neq 1\,,\, \alpha\neq 0$ ។

- បើ $p\neq 0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha\ln a}\int \frac{1}{t(t-p)}dt = \frac{1}{\alpha\, p\ln a}\int \frac{t-(t-p)}{t(t-p)}dt$$

$$\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha\ln a}\int \frac{1}{t(t-p)}dt = \frac{1}{\alpha\, p\ln a}\int \frac{t-(t-p)}{t(t-p)}dt$$

---

[៣] Herbert Bristol Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data,* 1957, p. 200

$$=\frac{1}{\alpha p\ln a}\int\left(\frac{1}{t-p}-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{\alpha p\ln a}\left(\ln|t-p|-\ln|t|\right)+c_1$$

$$=\frac{1}{\alpha p\ln a}\left(\ln\left|p+qa^{\alpha x}-p\right|-\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|\right)+c$$

$$=\frac{1}{\alpha p\ln a}\left(\alpha x\ln a-\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|\right)+c$$

$$=\frac{x}{p}-\frac{1}{\alpha p\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+c$$

ដែល c_1 , c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ យើងបានរូបមន្តៈ

$$\int\frac{dx}{p+qa^{\alpha x}}=\begin{cases}\dfrac{-1}{\alpha q\ln a}\cdot\dfrac{1}{a^{\alpha x}}+c & \text{បើ } p=0\,,\,q\neq 0\\[2ex] \dfrac{x}{p}-\dfrac{1}{\alpha p\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+c & \text{បើ } p\neq 0\end{cases}\qquad(7)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណីពិសេស បើ $a=e$ និង $p\neq 0$ នាំឱ្យរូបមន្ត (7) ទៅជា

$$\int\frac{dx}{p+qe^{\alpha x}}=\frac{x}{p}-\frac{1}{\alpha p}\ln\left|p+qe^{\alpha x}\right|+c\quad(8)$$ [៤]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

បន្ទាប់មក យើងចង់ពង្រីកការគណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{a^{\alpha x}dx}{p+qa^{\alpha x}}$ និង $\int\frac{a^{2\alpha x}dx}{p+qa^{\alpha x}}$ ដែល $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ ដោយប្រើប្រាស់រូបមន្ត (7) ។

យើងបាន

$$\int\frac{a^{\alpha x}dx}{p+qa^{\alpha x}}=\frac{1}{q}\int\frac{(p+qa^{\alpha x})-p}{p+qa^{\alpha x}}dx=\frac{1}{q}\int dx-\frac{p}{q}\int\frac{dx}{p+qa^{\alpha x}}$$

$$=\frac{1}{q}x-\frac{p}{q}\left[\frac{x}{p}-\frac{1}{\alpha p\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|\right]+c\ \text{(រូបមន្ត (7))}$$

$$=\frac{1}{\alpha q\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+c$$

និង

[៤] Herbert Bristol Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data,* 1957, p. 127

$$\int \frac{a^{2\alpha x}dx}{p+qa^{\alpha x}} = \frac{1}{q^2}\int \frac{\left[(p+qa^{\alpha x})-p\right]^2}{\left(p+qa^{\alpha x}\right)}dx$$

$$= \frac{1}{q^2}\int \frac{\left(p+qa^{\alpha x}\right)^2 - 2p\left(p+qa^{\alpha x}\right)+p^2}{\left(p+qa^{\alpha x}\right)}dx$$

$$= \frac{1}{q^2}\int\left(p+qa^{\alpha x}\right)dx - \frac{2p}{q^2}\int dx + \frac{p^2}{q^2}\int\frac{1}{p+qa^{\alpha x}}dx$$

$$= \frac{1}{q}\int a^{\alpha x}dx - \frac{p}{q^2}\int dx + \frac{p^2}{q^2}\int\frac{1}{p+qa^{\alpha x}}dx$$

$$= \frac{a^{\alpha x}}{\alpha q\ln a} - \frac{px}{q^2} + \frac{p^2}{q^2}\left[\frac{x}{p} - \frac{1}{\alpha p\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|\right]+c$$ (រូបមន្ត (7))

$$= \frac{a^{\alpha x}}{\alpha q\ln a} - \frac{p}{\alpha q^2\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ និង $q\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត៖

$$\int\frac{a^{\alpha x}dx}{p+qa^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha q\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+c \qquad (9)$$

និង

$$\int\frac{a^{2\alpha x}dx}{p+qa^{\alpha x}} = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha q\ln a} - \frac{p}{\alpha q^2\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+c \qquad (10)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណីពិសេស បើ $a=e$ នាំឱ្យរូបមន្ត (9) និង (10) ទៅជា

$$\int\frac{e^{\alpha x}dx}{p+qe^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha q}\ln\left|p+qe^{\alpha x}\right|+c \qquad (11)$$

និង

$$\int\frac{e^{2\alpha x}dx}{p+qe^{\alpha x}} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha q} - \frac{p}{\alpha q^2}\ln\left|p+qe^{\alpha x}\right|+c \qquad (12)$$ [៥]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

---

[៥] http://is.muni.cz/el/1431/podzim2014/F5170/um/integrals.pdf

ពីរូបមន្ត (9) និង (10) ដោយអនុវត្តន៍ចំពោះ $a>0, a\neq 1, \alpha<0,\ p\neq 0$ និង $q\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត៖

$$\int_0^{+\infty}\frac{a^{\alpha x}\,dx}{p+qa^{\alpha x}}=\frac{1}{\alpha q\ln a}\ln\left|\frac{p}{p+q}\right| \qquad (13)$$

និង

$$\int_0^{+\infty}\frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+qa^{\alpha x}}=-\frac{1}{\alpha q\ln a}+\frac{p}{\alpha q^2\ln a}\ln\left|\frac{p+q}{p}\right| \qquad (14)$$ ។

អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int\frac{dx}{\left(p+qa^{\alpha x}\right)^n}$

អាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{(p+qa^{\alpha x})^n}$ $(a>0, a\neq 1, \alpha\neq 0, n\in\{2, 3, 4, ...\})$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{(p+qa^{\alpha x})^n}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{(p+qa^{\alpha x})^n}$ យើងតាង $t=p+qa^{\alpha x}$ $(\alpha\neq 0)$

នាំឱ្យ $x=\frac{\ln(t-p)-\ln q}{\alpha\ln a}$ និង $dx=\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}$ ។

នាំឱ្យ $\int\frac{dx}{(p+qa^{\alpha x})^n}=\int\frac{1}{t^n}\cdot\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}=\frac{1}{\alpha\ln a}\int\frac{1}{t^n(t-p)}dt$ $(*_1)$ ។

- បើ $p=0$ និង $q\neq 0$ នាំឱ្យសមីការ $(*_1)$ ទៅជា

$$\int\frac{dx}{(p+qa^{\alpha x})^n}=\int\frac{dx}{(qa^{\alpha x})^n}=\frac{1}{\alpha\ln a}\int\frac{1}{t^{n+1}}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha\ln a}\int t^{-(n+1)}dt=\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{t^{-n}}{(-n)}+c$$

$$=\frac{-1}{n\alpha\ln a}\cdot\frac{1}{t^n}+c=\frac{-1}{n\alpha\ln a}\cdot\frac{1}{(qa^{\alpha x})^n}+c$$

$$=\frac{-1}{n\alpha q^n\ln a}\cdot\frac{1}{a^{n\alpha x}}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ ។

- បើ $p\neq 0$ នោះយើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{1}{t^n(t-p)}dt$ ។ អាំងតេក្រាលនេះមានកន្សោមអាំងតេក្រាល $\frac{1}{t^n(t-p)}$ ដែលអាចបំបែកជាប្រភាគងាយតាមវិធីប្រភាគដោយផ្នែក។

យើងមាន $\frac{1}{t^n(t-p)}=\frac{A}{t-p}+\frac{B_1}{t}+\frac{B_2}{t^2}+\frac{B_3}{t^3}+...+\frac{B_n}{t^n}\quad(*_2)$

$$=\frac{At^n+B_1(t-p)t^{n-1}+B_2(t-p)t^{n-2}+...+B_{n-1}(t-p)t+B_n(t-p)}{t^n(t-p)}$$

នាំឱ្យ

$$1=At^n+B_1(t-p)t^{n-1}+B_2(t-p)t^{n-2}+...+B_{n-1}(t-p)t+B_n(t-p)$$

ឬ $1=(A+B_1)t^n+(-pB_1+B_2)t^{n-1}+...+(-pB_{n-1}+B_n)t+(-pB_n)$ ។

ដោយផ្ទឹមមេគុណនៃពហុធា យើងបាន៖

$$\begin{cases}A+B_1=0\\-pB_1+B_2=0\\\text{.........................}\\\text{.........................}\\-pB_{n-1}+B_n=0\\-pB_n=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-B_1\\p\,B_1=B_2\\\text{......................}\\\text{......................}\\p\,B_{n-1}=B_n\\B_n=-1/p=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-B_1=1/p^n\\B_1=\lambda/p^{n-1}=-1/p^n\\\text{...............................}\\\text{...............................}\\B_{n-1}=\lambda/p=-1/p^2\\B_n=-1/p=\lambda\end{cases}$$

ពីសមីការ $(*_2)$ ទៅជា៖

$$\frac{1}{t^n(t-p)}=\frac{1}{p^n(t-p)}-\frac{1}{p^nt}-\frac{1}{p^{n-1}t^2}-\frac{1}{p^{n-2}t^3}-...-\frac{1}{p^2t^{n-1}}-\frac{1}{pt^n}$$

$$=\frac{1}{p^n(t-p)}-\frac{1}{p^nt}-\frac{t^{-2}}{p^{n-1}}-\frac{t^{-3}}{p^{n-2}}-...-\frac{t^{-(n-1)}}{p^2}-\frac{t^{-n}}{p}\text{ ។}$$

នាំឱ្យ

$$\int\frac{1}{t^n(t-p)}dt=\frac{1}{p^n}\int\frac{dt}{t-p}-\frac{1}{p^n}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{p^{n-1}}\int t^{-2}dt-\frac{1}{p^{n-2}}\int t^{-3}dt$$

$$-\ldots-\frac{1}{p^2}\int t^{-(n-1)}dt-\frac{1}{p}\int t^{-n}dt$$

$$=\frac{1}{p^n}\ln|t-p|-\frac{1}{p^n}\ln|t|-\frac{t^{-1}}{p^{n-1}(-1)}-\frac{t^{-2}}{p^{n-2}(-2)}$$

$$-\ldots-\frac{t^{-n+2}}{p^2(-n+2)}-\frac{t^{-n+1}}{p(-n+1)}+c_1$$

$$=\frac{1}{p^n}\ln|t-p|-\frac{1}{p^n}\ln|t|+\frac{1}{p^{n-1}t}+\frac{1}{2p^{n-2}t^2}$$

$$+\ldots+\frac{1}{(n-2)p^2t^{n-2}}+\frac{1}{(n-1)pt^{n-1}}+c_1$$

$$=\frac{1}{p^n}\ln\left|qa^{\alpha x}\right|-\frac{1}{p^n}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+\frac{1}{p^{n-1}\left(p+qa^{\alpha x}\right)}+\frac{1}{2p^{n-2}\left(p+qa^{\alpha x}\right)^2}$$

$$+\ldots+\frac{1}{(n-2)p^2\left(p+qa^{\alpha x}\right)^{n-2}}+\frac{1}{(n-1)p\left(p+qa^{\alpha x}\right)^{n-1}}+c_1$$

$$=\frac{\alpha x}{p^n}\ln a-\frac{1}{p^n}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\,p^{n-k}\left(p+qa^{\alpha x}\right)^k}+c_2$$

ដែល c_1 , c_2 ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ ។

ពីសមីការ $(*_2)$ ទៅជា៖

$$\int\frac{dx}{(p+qa^{\alpha x})^n}=\frac{x}{p^n}-\frac{1}{\alpha p^n\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+\frac{1}{\alpha\ln a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\,p^{n-k}\left(p+qa^{\alpha x}\right)^k}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$, $n\in\{2, 3, 4, \ldots\}$ យើងបានរូបមន្ត៖

$$\int\frac{dx}{(p+qa^{\alpha x})^n}=\begin{cases}\dfrac{-1}{n\alpha q^n\ln a}\cdot\dfrac{1}{a^{n\alpha x}}+c & \text{បើ } p=0\,,\, q\neq 0\\[2ex] \dfrac{x}{p^n}-\dfrac{1}{\alpha p^n\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+\dfrac{1}{\alpha\ln a}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\,p^{n-k}(p+qa^{\alpha x})^k}+c & \text{បើ } p\neq 0\end{cases}\qquad(15)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណីពិសេស បើ $a=e$ និង $p\neq 0$ នាំឱ្យរូបមន្ត (9) ទៅជា

$$\int \frac{dx}{(p+qe^{\alpha x})^n} = \frac{x}{p^n} - \frac{1}{\alpha p^n}\ln\left|p+qe^{\alpha x}\right| + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\,p^{n-k}\left(p+qe^{\alpha x}\right)^k} + c \quad (16)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ប្រសិនបើ យើងយក $n=2$ នាំឱ្យរូបមន្ត (10) ទៅជា

$$\int \frac{dx}{(p+qe^{\alpha x})^2} = \frac{x}{p^2} - \frac{1}{\alpha p^2}\ln\left|p+qe^{\alpha x}\right| + \frac{1}{\alpha p(p+qe^{\alpha x})} + c \quad (17)$$ [៦]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

លោកអ្នកច្បាស់ជាឃើញថា ខ្ញុំបានរៀបរៀងរូបមន្តអាំងតេក្រាលពីរមានទម្រង់ខាងក្រោម៖

១. ចំពោះ $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ ខ្ញុំបាន

$$\int \frac{dx}{p+qa^{\alpha x}} = \begin{cases} \dfrac{-1}{\alpha q\ln a}\cdot\dfrac{1}{a^{\alpha x}} + c & \text{បើ } p=0\,,\, q\neq 0 \\ \dfrac{x}{p} - \dfrac{1}{\alpha p\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right| + c & \text{បើ } p\neq 0 \end{cases}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

២. ចំពោះ $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$, $n\in\{2, 3, 4, ...\}$ ខ្ញុំបាន

$$\int \frac{dx}{(p+qa^{\alpha x})^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{n\alpha q^n\ln a}\cdot\dfrac{1}{a^{n\alpha x}} + c & \text{បើ } p=0\,,\, q\neq 0 \\ \dfrac{x}{p^n} - \dfrac{1}{\alpha p^n\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right| + \dfrac{1}{\alpha\ln a}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\,p^{n-k}(p+qa^{\alpha x})^k} + c & \text{បើ } p\neq 0 \end{cases}$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ជាទីបញ្ចប់នេះ លោកអ្នកអាន និង អ្នកស្រាវជ្រាវបានឃើញរូបមន្តអាំងតេក្រាលទាំងពីរខាងលើ ដែលជារូបមន្តរបស់ខ្ញុំបានរៀបរៀងឡើងនៅថ្ងៃទី០១ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ២០១៥ ហើយខ្ញុំបានធ្វើបទបង្ហាញវាចំនួនពីរលើករួចមកហើយនៅ **មហោស្រពវិទ្យាសាស្ត្រនិងវិស្វកម្មកម្ពុជា លើកទី១ (២០១៥) និង លើកទី២ (២០១៦)**។ ខ្ញុំសង្ឃឹមថា រូបមន្តអាំងតេក្រាលទាំងពីរនេះនឹងផ្តល់វិភាគទានដល់អ្នកសិក្សា និង អ្នកស្រាវជ្រាវជំនាន់ក្រោយយកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងផ្នែកគណនានិងមានគំនិតបង្កើតទ្រឹស្តី ឬ រូបមន្តថ្មីៗទៀត។

---

៦ Karl Smith, ***Student Mathematics Handbook and Integral Table for Calculus***, p. 242

ឯកសារយោង

១. Herbert Bristol Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, New York, Macmillan Company, Third Edition, 1957.

២. Karl Smith, *Student Mathematics Handbook and Integral Table for Calculus*, United States of America, Prentice-Hall, Inc., Third Edition, 2002.

៣. http://is.muni.cz/el/1431/podzim2014/F5170/um/integrals.pdf

៤. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_integrals_of_exponential_functions

៥. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/improper.2/

៦. http://www.sosmath.com/tables/integral/integ27/integ 27. html

៧. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា *អាំងតេក្រាលមិនកំណត់* ភ្នំពេញ ឆ្នាំ១៩៩៧។

៨. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា *អាំងតេក្រាលកំណត់* ភ្នំពេញ ឆ្នាំ១៩៩៩។

៩. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា *សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យា និង វិទ្យាសាស្ត្រ* ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១៦។