រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

ការពង្រីកនិងការអនុវត្តអាំងតេក្រាលដែលមាន អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៅក្នុង គណិតវិទ្យា និង រូបវិទ្យា

Extension and Applications of Integral Involving Exponential Function in Mathematical and Physical Fields

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

ផ្នែកគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ
វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា
រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា

កញ្ញា ២០២០

ការពង្រីកនិងការអនុវត្តអាំងតេក្រាលដែលមាន
អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៅក្នុង
គណិតវិទ្យា និង រូបវិទ្យា

Extension and Applications of Integral Involving
Exponential Function in Mathematical and Physical Fields

សិក្សារៀបរៀង

យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា

ភ្នំពេញ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០២០

មាតិកា

ទំព័រ

ជំពូកទី១

ទ្រឹស្តីពាក់ព័ន្ធ

ជំពូកទី២

ដំណោះស្រាយអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ជំពូកទី៣

ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើអនុគមន៍ឡូជីស្ទីក

ឧទ្ទិសស្នាដៃ

ខ្ញុំសូមឧទ្ទិសជូនចំពោះបណ្ឌិត សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកប្រាជ្ញគ្រប់ជំនាន់ គ្រប់ជំនាញទាំងអស់ក្នុងប្រទេសនិងក្រៅប្រទេសមានផ្នែកគណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា ជីវវិទ្យា កុំព្យូទ័រ វិស្វកម្ម និងសេដ្ឋកិច្ចជាដើម។ ជាពិសេសអ្នកជំនាញផ្នែកគណិតវិទ្យាទាំងអស់បានធ្វើមរណៈកាលតាំងពីយូរលង់ក្តីនិងទើបទទួលមរណៈថ្មីនេះក្តី។

ខ្ញុំសូមឧទ្ទិសជូនចំពោះសាស្ត្រាចារ្យ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ដែលបានបង្ហាត់បង្រៀនខ្ញុំបាទតាំងពីតូចនិងរហូតដល់បច្ចុប្បន្នដែលលោកបានធ្វើមរណៈកាលទៅ។

ខ្ញុំសូមឧទ្ទិសស្នាដៃនេះជូនដល់ឯកឧត្តមបណ្ឌិតសភាចារ្យ **ចាន់ ៣ន** អតីតប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា ដែលបានទទួលមរណភាពទៅដោយការសោកស្តាយ សូមឱ្យវិញ្ញាណក្ខន្ធលោកជួបតែសុគតិភពរហូតតទៅ។

ខ្ញុំសូមឧទ្ទិសស្នាដៃសៀវភៅនេះជូនចំពោះបុព្វការីជនរួមមាន៖

. អ្នកម្តាយបង្កើត **យ៉ែម ម៉ាលីស**

. លោកយាយ **វ៉េត តែម**

. អ្នកម្តាយក្មេក **កៅ យុទ្ធ ថា**

. លោកយាយ វ៉េត ណយ និង លោកពូ ប៉ែន ចាន់ម៉ារ៉ា

. លោកតាពៅ លោកតាស៊ុគ និង លោកយាយអែម។

សូមព្រះវិញ្ញាណក្ខ័ន្ធនិងវិញ្ញាណក្ខ័ន្ធ បុព្វការីជនទាំងអស់យាងនិងអញ្ជើញទៅសោយសុខនិងសុគតិភពដោយស្ងប់សុខផងចុះ។

សេចក្ដីថ្លែងអំណរគុណ

សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះបណ្ឌិតសភាចារ្យ **សុខ ទូច** ជាប្រធាននៃរាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ដែលបានជំរុញការស្រាវជ្រាវ និង ជួយគាំទ្រសម្រាប់ស្នាដៃរបស់ខ្ញុំបាទ។

សូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះ៖

១. ឯកឧត្ដមបណ្ឌិត **អ៊ិច ប៊ុណ្ណា** ជាប្រធានវិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា ដែលបានជំរុញការស្រាវជ្រាវ និង ជួយគាំទ្រសម្រាប់ស្នាដៃរបស់ខ្ញុំបាទ។

២. លោកស្រីបណ្ឌិត **យ៉ាន់ ទិតារតន៍** ជាប្រធានផ្នែកសិល្បៈទស្សនីយភាព និង ជាភរិយាដែលបានជួយនិងទុកលទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាងដើម្បីឱ្យខ្ញុំបាទបានសម្រេចស្នាដៃមួយនេះ។

៣. លោក **លី សេខ** ជាអ្នកឧបត្ថម្ភដល់ការបោះពុម្ពសៀវភៅនេះសម្រាប់ចែកជូន និង ផ្សព្វផ្សាយដល់និស្សិត សាស្ត្រាចារ្យ និង អ្នកស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យា។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ដែលបានបង្ហាត់បង្រៀនខ្ញុំបាទតាំងពីតូចរហូតដល់វ័យចំណាស់នេះ លោកទាំងអស់បានផ្ដល់នូវពុទ្ធិដ៏ច្រើនលើសលុបដែលមានតម្លៃមិនអាចកាត់ថ្លៃបានទេនូវទឹកចិត្ត ក៏ដូចជាសណ្ដានចិត្តមេត្តា សណ្ដោះប្រណីចំពោះសិស្សគ្រប់ៗគ្នា បើពុំមានការយកចិត្តទុកដាក់បង្ហាត់បង្រៀនពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូទាំងអស់នោះទេ ម្ល៉េះខ្ញុំបាទមិនអាចមានចំណេះដឹងក្នុងការសរសេរសៀវភៅនេះទេ។

ខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះសាស្ត្រាចារ្យ បណ្ឌិតនិងទស្សនវិទូគណិតវិទ្យាទាំងឡាយ ដែលបានខិតខំស្រាវជ្រាវទ្រឹស្ដីឬរូបមន្តគណិតវិទ្យា ហើយបានចងក្រងជាសៀវភៅយ៉ាងច្រើន ទុកឯកសារស្រាវជ្រាវដល់កូនចៅជំនាន់ក្រោយ។

ខ្ញុំបាទសូមអរគុណដល់ក្រុមគ្រួសាររបស់ខ្ញុំបាទទាំងអស់ ដែលបានទុកលទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាងឱ្យខ្ញុំបាទបានធ្វើការស្រាវជ្រាវយ៉ាងពេញទំហឹងនៅលើសៀវភៅមួយនេះ ជាពិសេសគឺកូនទាំងបួនរបស់ខ្ញុំបាទមានសុខភាពរឹងមាំល្អដែលមិនរំខានដល់ការស្រាវជ្រាវរបស់ខ្ញុំបាទ។

មូលន័យសង្ខេប

បច្ចុប្បន្ននេះ វិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យា ជាពិសេសផ្នែកគណិតវិទ្យានិងរូបវិទ្យាកាន់តែរីកចម្រើនទៅមុខឥតឈប់ឈរក៏ពិតមែន ប៉ុន្តែការអភិវឌ្ឍរូបមន្តឬវិធីសាស្ត្រនានានៅតែត្រូវការជាចាំបាច់ក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាគណិតវិទ្យានិងរូបវិទ្យា។ ក្នុងគណិតវិទ្យាមានទ្រឹស្តី ស្វ័យសត្យ និយមន័យ បទគន្លឹះ ទ្រឹស្តីបទ កូរ៉ូលែវិបាក រូបមន្ត លក្ខណៈ ប្រភេទនិងវិធីសាស្ត្រជាច្រើនដែលបានរៀបរៀងនិងបង្កើតឡើងដោយអ្នកគណិតវិទ្យាជំនាន់មុនៗ ក៏ប៉ុន្តែការសិក្សាស្រាវជ្រាវគឺគ្មានព្រំដែនកំណត់ទេ ហេតុនេះអ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាជំនាន់ក្រោយៗអាចស្វែងរកទ្រឹស្តីបន្តនិងការអនុវត្តវាទៅក្នុងវិស័យផ្សេងៗទៀតបើអាចមានលទ្ធភាព។ ជាពិសេសដូចដែលយើងបានឃើញមានរូបមន្តអាំងតេក្រាលពីរតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកដែលយើងអាចធ្វើការសិក្សាស្រាវជ្រាវនិងពង្រីកវាទៅជាទម្រង់ទូទៅបាន។

សៀវភៅនេះចែកចេញជាបីជំពូកដែលក្នុងនោះមាន៖ ជំពូកទី១សិក្សាពីទ្រឹស្តីពាក់ព័ន្ធដែលទាក់ទងនឹងនិយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ និង រូបមន្តនៃព្រីមីទីវ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ អាំងតេក្រាលកំណត់ និង អាំងតេក្រាល Improper វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមួយគឺវិធីប្តូរអថេរ ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយផ្នែកនៃខ្សែកោង មាឌនៃសូលីដបរិវត្ត កំណើនឡូជីស្ទីក អនុគមន៍ឡូជីស្ទីក កំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេនិងកម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ ជំពូកទី២សិក្សាពីដំណោះស្រាយអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាមួយនឹងការដោះស្រាយរកចម្លើយវាដើម្បីបង្កើតជារូបមន្តថ្មី។ ជំពូកទីបី យើងសិក្សាអំពីការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើកំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេ ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើកម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ និង ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើមាឌនៃសូលីដបរិវត្តភ្ជាប់ជាមួយនិងឧទាហរណ៍។

នៅក្នុងសេចក្តីសន្និដ្ឋាន យើងនឹងទទួលបាននូវរូបមន្តអាំងតេក្រាលថ្មីមួយចំនួនដែលអាចផ្តល់ផលប្រយោជន៍ក្នុងការអនុវត្ត គឺជួយក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលឱ្យបានលឿន ហើយនិងប្រើប្រាស់វាក្នុងការរកផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ក្នុងប្លង់ មាឌនៃសូលីដបរិវត្តក្នុងលំហ ទំហំកំណើននៃស្ថិតិសាកល និង កម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ។ ជាងនេះទៅទៀត យើងនឹងទទួលនូវគំនិតនិងចំណេះដឹងថ្មីដែលកើតចេញអំពីប្រធានបទនៃនិក្ខេបបទស្រាវជ្រាវនេះ និង យើងសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះ ជាឯកសារដ៏សំខាន់មួយសម្រាប់ជួយដល់សិស្ស និស្សិត លោកគ្រូ និងអ្នកគ្រូដែលមានបញ្ហាខ្លះៗទាក់ទងនឹងការគណនាអាំងតេក្រាលទាំងកម្រិតមធ្យមសិក្សា ឧត្តមសិក្សា និង ការអនុវត្តវា។

អារម្ភកថា

លោកអ្នកសិក្សាគណិតវិទ្យាអាចដឹងហើយថា អាំងតេក្រាលជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យាដែលមានការស្មុគស្មាញទាំងទ្រឹស្តីនិងគណនាដល់អ្នកសិក្សា ប៉ុន្តែផ្នែកមួយនេះគេមិនអាចដកចេញបានឡើយសម្រាប់អ្នកសិក្សានិងអ្នកស្រាវជ្រាវក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ។ ម្យ៉ាងទៀត កំណើនឡូជីស្ទីកមានប្រយោជន៍លើវិស័យជាច្រើនដូចជា គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ជីវវិទ្យា និង សេដ្ឋកិច្ចជាដើម ហើយនៅក្នុងប្រទេសកម្ពុជាយើង ឯកសារឬសៀវភៅដែលត្រូវបានបោះពុម្ពជាភាសាខ្មែរហើយដែលទាក់ទងទៅនឹងការយល់ដឹងអំពីការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើអនុគមន៍ឡូជីស្ទីកនិងវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយវាគឺមិនមានទេ។

ដោយសារមូលហេតុនេះហើយទើបយើងខ្ញុំបានកំណត់យកប្រធានបទមួយមកបកស្រាយគឺ « **ការពង្រីកនិងការអនុវត្តអាំងតេក្រាលដែលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៅក្នុងគណិតវិទ្យានិងរូបវិទ្យា** »។ សៀវភៅនេះ ត្រូវបានស្រាវជ្រាវ រៀបរៀង និង ដោះស្រាយអាំងតេក្រាលមួយប្រភេទ ដើម្បីទុកជាឯកសារស្រាវជ្រាវនិងជាចំណេះដឹងមួយសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និង អ្នកស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាដែលមានបញ្ហាខ្លះៗទាក់ទងនឹងប្រធានបទនេះហើយនិងការអនុវត្តវា។

សៀវភៅនេះរួមមាន៣ជំពូក។ ជំពូកទី១សិក្សាអំពីទ្រឹស្តីពាក់ព័ន្ធ ជំពូកទី២សិក្សាអំពីដំណោះស្រាយអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង ជំពូកទី៣សិក្សាអំពីការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើអនុគមន៍ឡូជីស្ទីក។

សរុបសេចក្តីមក យើងខ្ញុំសង្ឃឹមនិងជឿជាក់ថា មិត្តអ្នកអាន និង អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាពិតជាទទួលបាននូវផលប្រយោជន៍និងជោគជ័យក្នុងកិច្ចការសិក្សាជាមិនខានពីសៀវភៅនេះ។

លំនាំដើម

គណិតវិទ្យា មានការវិវត្តជាបន្តបន្ទាប់ទាំងទ្រឹស្តីនិងការអនុវត្តរបស់វាក្នុងវិស័យវិទ្យាសាស្ត្រ បច្ចេកវិទ្យា និង វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម។ ក្នុងផ្នែកទ្រឹស្តីត្រូវបានរកឃើញដោយអ្នកគណិតសាស្ត្រមានដូចជាស្វ័យសត្យ និយមន័យ បទគន្លឹះ ទ្រឹស្តីបទ កូរ៉ូលែ វិបាក រូបមន្ត លក្ខណៈ និង វិធីសាស្ត្រផ្សេងៗក្នុងការគណនានិងការបង្កើតថ្មី បន្តឬក៏វិភាគលើបញ្ហាអ្វីមួយដោយប្រើវិធីគណិតវិទ្យានិងស្ថិតិ។ ហេតុនេះ យើងខ្ញុំក៏គិតថា យើងនឹងធ្វើការសិក្សាស្រាវជ្រាវអំពីរូបមន្តខ្លះៗនៃអាំងតេក្រាលដែលបន្តពីរូបមន្តរបស់អ្នកគណិតសាស្ត្រជំនាន់មុនៗ ពីព្រោះអាំងតេក្រាលអាចយកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងការរកផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ក្នុងប្លង់ និង មាឌនៃសូលីដក្នុងលំហ ឬក៏គេអាចយកអាំងតេក្រាលទៅដោះស្រាយបញ្ហាខ្លះៗក្នុងរូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា ជីវវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ចជាដើម។

យើងបានស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាតាមអ៊ីនធឺណិត ក៏ប្រទះឃើញវេបសាយ http://www.sosmath.com/tables/integral/integ27/integ 27. html និង សៀវភៅពីរក្បាលគឺ Tables of Integrals and Other Mathematical Data , Student Mathematics Handbook and Integral Table for Calculus មានរូបមន្តអាំងតេក្រាលគឺ៖

1. $\int \frac{dx}{p+qe^{ax}} = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap}\ln(p+qe^{ax}) + c$

2. $\int \frac{dx}{(p+qe^{ax})^2} = \frac{x}{p^2} + \frac{1}{ap(p+qe^{ax})} - \frac{1}{ap^2}\ln(p+qe^{ax}) + c$

ហើយយើងខ្ញុំគិតថា យើងនឹងសិក្សាពង្រីកអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលខាងលើនេះទៅជាទម្រង់ទូទៅ $\int \frac{dx}{\left(p+qa^{\alpha x}\right)^n}$ ដែល $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$ និង ដំណោះស្រាយរបស់វា។

សេចក្តីផ្តើម

១. លំនាំបញ្ហានៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ

បច្ចុប្បន្ននេះ វិទ្យាសាស្ត្រនិងបច្ចេកវិទ្យាកាន់តែរីកចម្រើនទៅមុខឥតឈប់ឈរមែនក៏នៅតែប្រើប្រាស់ក្បួន រូបមន្តឬវិធីសាស្ត្រនានានៃជំនាញគណិតវិទ្យា។ ក្នុងគណិតវិទ្យាមានទ្រឹស្តី ស្វ័យសត្យ និយមន័យ បទគន្លឹះ ទ្រឹស្តីបទ ក្សរ៉ូលែ វិបាក រូបមន្ត លក្ខណៈ ប្រភេទនិងវិធីសាស្ត្រជាច្រើនដែលបានរៀបរៀងនិងបង្កើតឡើងដោយអ្នកគណិតវិទ្យាជំនាន់មុនៗ ក៏ប៉ុន្តែការសិក្សាស្រាវជ្រាវគឺគ្មានព្រំដែនកំណត់ទេ ហេតុនេះអ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យាជំនាន់ក្រោយៗអាចស្វែងរកទ្រឹស្តីបន្ត និង ការអនុវត្តវាទៅក្នុងវិស័យផ្សេងៗទៀតបើអាច។ ជាពិសេសដូចដែលយើងបានឃើញនៅក្នុងលំនាំដើមរួចមកហើយថាមានរូបមន្តអាំងតេក្រាលពីរដែលយើងខ្ញុំអាចធ្វើការសិក្សាស្រាវជ្រាវនិងពង្រីកវាទៅជាទម្រង់ទូទៅបាន។ ម្យ៉ាងទៀត សិស្សនិងនិស្សិតភាគច្រើននៅក្នុងប្រទេសយើងចូលចិត្តរៀនគណិតវិទ្យាអនុវត្តន៍ជាងខាងទ្រឹស្តី ហើយការសិក្សាអាំងតេក្រាលអាចឱ្យពួកគេយកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងការគណនាផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ខណ្ឌដោយខ្សែកោងនិងគណនាមាឌនៃសូលីដបរិវត្ត។ ជួនកាល គេអាចយកអាំងតេក្រាលទៅដោះស្រាយបញ្ហាខ្លះៗក្នុងរូបវិទ្យា ជីវវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ចជាដើម។

២. ចំណោទបញ្ហានៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ

ពីលំនាំដើម យើងឃើញថា គេមានតែរូបមន្តអាំងតេក្រាលពីរដែលមានគោល $a=e$ $(e\approx 2.71828)$ និង $n=1\,,\,2$ ហើយគេមិនទាន់យកវាមកអនុវត្តនៅឡើយទេ ហេតុនេះតាមលំនាំបញ្ហា យើងនឹងធ្វើការសិក្សាស្រាវជ្រាវនិងពង្រីកវាទៅជាទម្រង់ទូទៅបានដែលមានគោល $a>0\,,\,a\neq 1$ និងស្វ័យគុណ $n\in\mathbb{N}$ ហើយក៏លើកយកប្រធានបទមួយស្តីអំពី << **ការពង្រីកនិងការអនុវត្តអាំងតេក្រាលដែលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៅក្នុងគណិតវិទ្យា និង រូបវិទ្យា** >>។ តើគេអាចដោះស្រាយប្រភេទអាំងតេក្រាលនេះតាមវិធីសាស្ត្រណា? តើគេនឹងទទួលបានរូបមន្តអាំងតេក្រាលមានទម្រង់បែបណា? តើគេអាចពង្រីកនិងការអនុវត្តវាបានដែរឬទេ? ដើម្បីឆ្លើយតបនឹងសំណួរទាំងនេះ យើងខ្ញុំនឹងបង្ហាញវានៅក្នុងជំពូកទី២និងទី៣។ ជាដំបូង យើងនឹងសិក្សាទ្រឹស្តីដែលទាក់ទងនឹងប្រធានបទរបស់យើងក្នុងជំពូកទី១មុនសិនស្តីអំពីទ្រឹស្តីពាក់ព័ន្ធ។

៣. គោលបំណងនៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ

ឆ្លើយតបទៅនឹងចំណោទបញ្ហាខាងលើ ការស្រាវជ្រាវចំពោះស្នាដៃនេះមានគោលបំណងចង់ពង្រីករូបមន្តអាំងតេក្រាលមួយប្រភេទដែលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលបន្តពីអ្នកគណិតវិទ្យាជំនាន់មុន ឱ្យទៅជារូបមន្តដែលមានទម្រង់ទូទៅជាងមុន និង ការអនុវត្តវាក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ឡូជីស្ទីក ការគណនាផ្ទៃក្រឡានិងមាឌ ហើយនិងដោះស្រាយបញ្ហាខ្លះៗក្នុងរូបវិទ្យាដូចជាកំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេ កម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរជាដើម។

៤. ដែនកំណត់នៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ

ការស្រាវជ្រាវតាមបែបវិទ្យាសាស្ត្រនេះ យើងខ្ញុំនឹងលើកយកតែទ្រឹស្តី ប្រភេទ និង វិធីសាស្ត្រគណនាដេរីវេ និង អាំងតេក្រាលមួយអថេរប៉ុណ្ណោះក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យាមកសិក្សាស្រាវជ្រាវ ការបង្កើតទ្រឹស្តីថ្មីឬរូបមន្តថ្មីបន្ត និង ការអនុវត្តវាលើផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង មាឌនៃសូលីដបរិវត្ត និង អនុគមន៍ឡូជីស្ទីកក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងរូបវិទ្យា។

៥. វិធីសាស្ត្រនៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ

ចំពោះវិធីសាស្ត្រស្រាវជ្រាវវិញ យើងខ្ញុំយកទ្រឹស្តី (រូបមន្តអាំងតេក្រាល) ទៅបង្កើតទ្រឹស្តី (រូបមន្តអាំងតេក្រាលបន្ត) និង ការអនុវត្តវាលើអនុគមន៍ឡូជីស្ទីក។

៦. លទ្ធផលនៃការរំពឹងទុក

ការស្រាវជ្រាវទៅលើស្នាដៃនេះ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថានឹងទទួលបានរូបមន្តអាំងតេក្រាលថ្មីមួយចំនួនសម្រាប់យកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងការគណនាផ្ទៃក្រឡាឬមាឌ ហើយអាចដោះស្រាយបញ្ហាខ្លះៗក្នុងរូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា ជីវវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ចជាដើម។

៧. រចនាសម្ព័ន្ធនៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ

សៀវភៅនេះមានផ្នែកសេចក្តីផ្តើម និង ចែកចេញជាបីជំពូកដែលជំពូកនីមួយៗមានខ្លឹមសារខុសៗគ្នាតែមានទំនាក់ទំនងជាមួយគ្នាយ៉ាងជិតស្និទ្ធ។

សេចក្តីផ្តើម៖ លំនាំបញ្ហានៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ ចំណោទបញ្ហានៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ គោលបំណងនៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ ដែនកំណត់នៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ វិធីសាស្ត្រនៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ លទ្ធផលនៃការរំពឹងទុក និង រចនាសម្ព័ន្ធនៃការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។

ជំពូកទី១៖ ទ្រឹស្តីពាក់ព័ន្ធ– សិក្សាពីនិយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ និង រូបមន្តនៃព្រីមីទីវ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ អាំងតេក្រាលកំណត់ អាំងតេក្រាល Improper កំណើនឡូជីស្ទីក អនុគមន៍ឡូជីស្ទីក និង កំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេ។ ក្នុងជំពូកទី១នេះក៏មានវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមួយគឺវិធីប្តូរអថេរដែលអាចគណនាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនបាន។ ជាពិសេស យើងបានអនុវត្តអាំងតេក្រាល ដើម្បីរកផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយផ្នែកនៃខ្សែកោងមួយឬពីរ រកមាឌនៃសូលីដបរិវត្តក្នុងលំហ និង រកកម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ។

ជំពូកទី២៖ ដំណោះស្រាយអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល– សិក្សាពីអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាងធម្មតា និង អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាងពិសេសមួយប្រភេទដែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រច្រើនជាមួយនឹងការដោះស្រាយរកចម្លើយវា ដើម្បីបង្កើតជារូបមន្តថ្មីចំនួនប្រាំបីគឺរូបមន្ត (2.7) , (2.9) , (2.10) , (2.11) , (2.13) , (2.14) , (2.15) និង (2.16) ដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅ។

ជំពូកទី៣៖ ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើអនុគមន៍ឡូជីស្ទីក– សិក្សាពីការអនុវត្តអាំងតេក្រាលដែលមានក្នុងជំពូកទី២លើអនុគមន៍ឡូជីស្ទីកដូចជាការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើកំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេ ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើកម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ និង ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើមាឌនៃសូលីដបរិវត្តភ្ជាប់ជាមួយនិងឧទាហរណ៍។ ជាពិសេស យើងបានបង្កើតជារូបមន្តថ្មីចំនួនប្រាំបួនគឺរូបមន្ត (3.1), (3.2) , (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) និង (3.9) ដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅ។

សន្និដ្ឋាន

គន្ថនិទ្ទេស

ជំពូកទី១
ទ្រឹស្តីពាក់ព័ន្ធ

នៅក្នុងជំពូកទី១នេះ យើងនឹងសិក្សានូវនិយមន័យនៃព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាល ហើយបន្ទាប់មក យើងនឹងសិក្សារូបមន្ត លក្ខណៈ និង វិធីខ្លះៗនៃការគណនាអាំងតេក្រាលដូចតទៅ៖

១.១. ព្រីមីទីវ

១.១.១. និយមន័យ

អនុគមន៍ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x)$ កាលណា $G'(x) = g(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ g ។[១]

១.១.២. ទ្រឹស្តីបទ

គេឱ្យ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ $g(x)$ នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $g(x)$ មានទម្រង់ទូទៅ $G(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។[២]

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់នៃទ្រឹស្តីបទនេះដូចតទៅ៖

ដោយ c ជាចំនួនពិតថេរ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x)$ នាំឱ្យ

$G'(x) = g(x)$ និង $(G(x)+c)' = G'(x)$

នាំឱ្យ $(G(x)+c)' = g(x)$ ។

នាំឱ្យ ព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $g(x)$ មានទម្រង់ទូទៅ $G(x)+c$ (ពិត)។

១.២. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

១.២.១. និយមន័យ

គេមាន $G(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ $g(x)$។ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $g(x)$ កំណត់ដោយ

$$\int g(x)dx = G(x)+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។[៣]

---

[១] គណៈកម្មការនិពន្ធ ៖ ***គណិតវិទ្យាកម្រិតមូលដ្ឋានថ្នាក់ទី១២*** *ភ្នំពេញ* ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ២០១៤, ទំព័រទី១១១

[២] គណៈកម្មការនិពន្ធ -ដ.ឯ.ម- ទំព័រទី១១១

[៣] គណៈកម្មការនិពន្ធ -ដ.ឯ.ម- ទំព័រទី១១៣

១.២.២. រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

យើងមានរូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់សំខាន់គឺៈ[៤]

១. $\int \alpha\, g(x)\, dx = \alpha \int g(x)\, dx\ ;\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (1.1)

២. $\int [g(x) \pm f(x)]\, dx = \int g(x)\, dx \pm \int f(x)\, dx$ (1.2) ។

ពីរូបមន្តទាំងពីរខាងលើ យើងអាចពន្លាតរូបមន្តឱ្យកាន់តែទូទៅៈ

$$\int \left[c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + c_3 g_3(x) + \ldots + c_n g_n(x)\right] dx =$$

$$c_1 \int g_1(x)\, dx + c_2 \int g_2(x)\, dx + c_3 \int g_3(x)\, dx + \ldots + c_n \int g_n(x)\, dx \quad (1.3)$$ ។

១.២.៣. រូបមន្តងាយនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

យើងមានរូបមន្តងាយៗមួយចំនួននៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដូចតទៅៈ[៥]

១. $\int \lambda\, dx = \lambda x + c$ (1.4)

២. $\int x^{\lambda}\, dx = \frac{1}{\lambda+1} x^{\lambda+1} + c,\ \lambda \neq -1$ (1.5)

៣. $\int x^{-1}\, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ (1.6)

៤. $\int e^{x}\, dx = e^{x} + c$ (1.7)

៥. $\int b^{x}\, dx = \frac{b^{x}}{\ln b} + c\ ,\ b > 0\ ,\ b \neq 1$ (1.8)

៦. $\int \frac{dx}{x^2 - b^2} = \frac{1}{2b} \ln\left|\frac{x-b}{x+b}\right| + c$ (1.9)

៧. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + c = \frac{1}{a} \tan^{-1}\frac{x}{a} + c\ ,\ a \neq 0$ (1.10) ។

[៤] គណៈកម្មការនិពន្ធ -ជ.ឯ.ម- ទំព័រទី១១៤ និងទី១១៥

[៥] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ៖ *អាំងតេក្រាលមិនកំណត់* *ភ្នំពេញ* ១៩៩៧, ទំព័រទី១១

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់នៃរូបមន្តងាយដូចតទៅៈ
យើងមានៈ

. $(\lambda x+c)'=\lambda$ នាំឱ្យ $\int \lambda\, dx=\lambda x+c$ ។

. $\left(\frac{1}{\lambda+1}x^{\lambda+1}+c\right)'=\frac{\lambda+1}{\lambda+1}x^{(\lambda+1)-1}=x^{\lambda}$, $\lambda\neq-1$ និង $\left(\ln|x|+c\right)'=\frac{1}{x}=x^{-1}$, $\lambda=-1$,

$x\neq0$ នាំឱ្យ $\int x^{\lambda}\, dx=\frac{1}{\lambda+1}x^{\lambda+1}+c$, $\lambda\neq-1$

និងចំពោះ $\lambda=-1$, $\int x^{-1}\, dx=\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+c$ ។

. $(e^{x}+c)'=e^{x}$ នាំឱ្យ $\int e^{x}\, dx=e^{x}+c$ ។

. $\left(\frac{b^{x}}{\ln b}+c\right)'=\frac{b^{x}\ln b}{\ln b}=b^{x}$ នាំឱ្យ $\int b^{x}\, dx=\frac{b^{x}}{\ln b}+c$ ។

. $\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c\right)'=\left(\frac{1}{2a}\ln|x-a|-\frac{1}{2a}\ln|x+a|+c\right)'$

$$=\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x+a}=\frac{x+a-x+a}{2a(x-a)(x+a)}$$

$$=\frac{2a}{2a(x^{2}-a^{2})}=\frac{1}{x^{2}-a^{2}}$$

នាំឱ្យ $\int \frac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$ ។

. $\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c\right)'=\frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{a\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^{2}\right)}=\frac{1}{a^{2}\left(1+\frac{x^{2}}{a^{2}}\right)}=\frac{1}{x^{2}+a^{2}}$

នាំឱ្យ $\int \frac{dx}{x^{2}+a^{2}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$ ។

១.៣. អាំងតេក្រាលកំណត់

១.៣.១. និយមន័យ

ឧបមាថា $y=g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,\, b]$ ដែល $a<b$ ។ បន្ទាប់មក យើងចែកចន្លោះ $[a,\, b]$ ជា n ចំណែកស្មើគ្នាដោយស្មឹតចំណុច

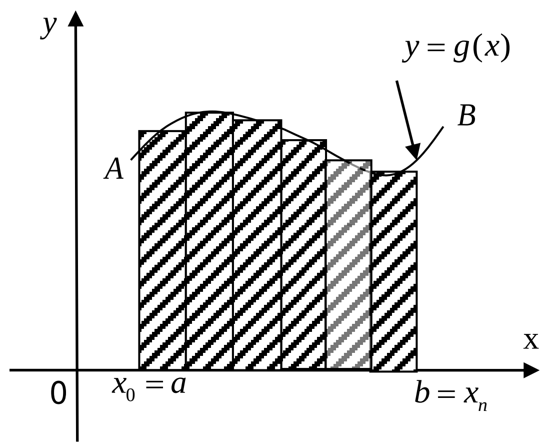
$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b \text{ ។}$$

នៅលើចន្លោះនីមួយៗ $[x_{i-1},\, x_i]$ គេជ្រើសរើសយកចំណុច $\xi_i \left(x_{i-1}\le \xi_i \le x_i\right)$ ហើយគេរកប្រវែងនៃចន្លោះនោះគឺ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ $(i=1,\, 2,\, 3,\, ...,\, n)$ ។ នាំឱ្យផលបូកអាំងតេក្រាលនៃ $g(x)$ លើចន្លោះ $[a,\, b]$ ជាផលបូកមានរាង៖

$$S_n = g(\xi_1)\Delta x_1 + g(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + g(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \quad (1.11)$$ [៦] ។

អត្ថន័យនៃផលបូក (1.11) ខាងលើ ជាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងដែលមានបាត $\Delta x_1,\, \Delta x_2,...,\, \Delta x_n$ និងកម្ពស់ $g(\xi_1)$, $g(\xi_2)$,..., $g(\xi_n)$ (សូមមើលរូបទី១)។

រូបទី១



អាំងតេក្រាលកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=g(x)$ លើចន្លោះ $[a,\, b]$ ជាលីមីតនៃផលបូកអាំងតេក្រាល ដោយមានលក្ខខណ្ឌប្រវែងដែលធំបំផុត $d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$ ក្នុងចន្លោះខិតទៅរកសូន្យ (មានន័យថា $n\to+\infty$) គឺថា

$$\int_a^b g(x)\, dx = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

ដែល $d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$ ។

---

[៦] សឿន សម្បត្តិ ៖ *គណិតវិទ្យា ភ្នំពេញ* សាកលវិទ្យាល័យអន្តរជាតិ ២០១០, ទំព័រទី៦១

បើ S_n មានលីមីតកំណត់ S មិនទាក់ទងនឹងការចែកចន្លោះនិងការជ្រើសរើសចំណុច ξ_i នោះគេថា S ជាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ $g(x)$ លើចន្លោះ $[a, b]$ ហើយគេសរសេរជា

$$\int_a^b g(x)\, dx = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n \to +\infty} S_n = S \quad (1.12)$$ ។[៧]

នៅត្រង់នេះ ចំនួន a និង b ហៅថា ដែនកំណត់អាំងតេក្រាលខាងក្រោម និងខាងលើ (គោលក្រោម និង គោលលើ), $g(x)$ ហៅថា អនុគមន៍អាំងតេក្រាល និង x ហៅថា អថេរអាំងតេក្រាល។

ចេញពីនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងលើ យើងឃើញថា តម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់អាស្រ័យតែនឹងអនុគមន៍ $g(x)$ និងចំនួន a និង b ហើយវាមិនអាស្រ័យទៅនឹងការតាងអថេរអាំងតេក្រាលឡើយគឺ

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b g(v)\,dv = \ldots$$ ។

១.៣.២. រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលកំណត់

គេឱ្យ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a, b]$ នោះគេបាន៖[៨]

១. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\ ;\ \forall a, b \in \mathbb{R}$ (1.13)

២. $\int_a^b \lambda\, g(x)\,dx = \lambda \int_a^b g(x)\,dx\ ;\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (1.14)

៣. $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^c g(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx\ ;\ a < c < b$ (1.15)

៤. $\int_a^a g(x)\, dx = 0$ (1.16)

៥. $\int_a^b g(x)\,dx = -\int_b^a g(x)\,dx$ (1.17)

៦. បើ $g(x) \geq 0$ លើ $[a, b]$ នោះគេបាន $\int_a^b g(x)\, dx \geq 0$ (1.18)

៧. ចំពោះ $\forall x \in [a, b];\ g(x) \leq f(x)$ នាំឱ្យ $\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx$ (1.19)

៨. $\left| \int_a^b g(x)\,dx \right| \leq \int_a^b \left| g(x) \right| dx$ (1.20) ។

---

[៧] សឿន សម្បត្តិ -ដ.ឯ.ម- ទំព័រទី៦២

[៨] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈរិដ្ឋា ៖ *អាំងតេក្រាលកំណត់ ភ្នំពេញ* ១៩៩៧, ទំព័រទី១ និងទី២

១.៣.៣. ទ្រឹស្តីបទ Newton – Leibnitz

ទ្រឹស្តីបទ បើ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a, b]$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(x)$ លើ $[a, b]$ នោះ

គេបាន $\int_a^b g(x)\,dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$[៩] (1.21) ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់នៃទ្រឹស្តីបទនេះដូចតទៅ៖

ដោយ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a, b]$ នាំឱ្យវាមានអាំងតេក្រាលលើ $[a, b]$ ។

បើគេមានព្រីមីទីវ $G(x)$ នៃ $g(x)$ លើ $[a, b]$ នាំឱ្យ

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x g(t)\,dt\right] = g(x) \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in [a, b]$$

នាំឱ្យ $\int_a^x g(t)\,dt = G(x) + c$ (c ជាចំនួនពិតថេរ)។

បើគេឱ្យ $x = a$ នាំឱ្យ $\int_a^a g(t)\,dt = G(a) + c$

សមមូល $0 = G(a) + c$ សមមូល $c = -G(a)$; $\forall x \in [a, b]$

នាំឱ្យ $\int_a^x g(t)\,dt = G(x) - G(a)$ ។

បើគេឱ្យ $x = b$ នោះគេបាន

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b \text{ (ពិត) ។}$$

តាមរូបមន្តក្នុងផ្នែក ១.២.៣. និង ទ្រឹស្តីបទ Newton – Leibnitz យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់មួយចំនួនដូចតទៅ៖

១. $\int_a^b \lambda\,dx = \lambda x\Big|_a^b = \lambda(b-a)$

២. $\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$

៣. $\int_1^a \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^a = \ln|a| - \ln|1| = \ln|a|$

៤. $\int_0^a e^y\,dy = e^y\Big|_0^a = e^a - e^0 = e^a - 1$

---

[៩] សឿន សម្បត្តិ -ដ.ឯ.ម- ទំព័រទី៦៣

៥. $\int_a^x b^y\, dy = \left.\frac{b^y}{\ln b}\right|_a^x = \frac{b^x}{\ln b} - \frac{b^a}{\ln b} = \frac{b^x - b^a}{\ln b}$, b > 0 , b ≠ 1 ។

១.៤. វិធីប្តូរអថេរ

ឧបមាថា គេមានអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $\int f[g(x)]\, g'(x)\, \mathrm{dx}$ ។

តាង $u = g(x)$ នោះ $\mathrm{du} = g'(x)dx$ ។ យើងបាន៖

$$\int f[g(x)]\, g'(x)\, \mathrm{dx} = \int f\left(u\right) \mathrm{du} = F(u) + c = F(g(x)) + c \quad (1.22)$$

ដែល F(u) ជាព្រីមីទីវនៃ f(u) និង c ជាចំនួនពិតថេរ។
ស្រដៀងគ្នាដែរ យើងក៏មានទ្រឹស្តីនៅក្នុងអាំងតេក្រាលកំណត់ដូចខាងក្រោម។

គេមានអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a, b]$។ បើអនុគមន៍ $x = h(t)$ មានដេរីវេ $h'(t)$ ជាប់លើចន្លោះ $[\alpha, \beta]$ ដែល $h([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$ ហើយ $h(\alpha) = a$ និង $h(\beta) = b$ នោះអាំងតេក្រាល

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[h(t)]h'(t)\,dt \quad (1.23)$$ (រូបមន្តប្តូរអថេរ)[១០] ។

យើងមានសម្រាយបញ្ជាក់នូវរូបមន្តប្តូរអថេរនេះដូចតទៅ៖

គេដឹងថា $F[h(t)]$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f[h(t)]\, h'(t)$។ តាមរូបមន្ត Newton-Leibnitz គេបាន៖

$$\int_\alpha^\beta f[h(t)]\, h'(t)\,dt = F[h(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[h(\beta)] - F[h(\alpha)]$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f\left(x\right)dx$$ (ពិត) ។

ឥឡូវនេះ យើងចង់គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{q}{\alpha x + \beta}\, \mathrm{d}x \ (\alpha \neq 0)$ ។ យើងប្រើវិធីប្តូរអថេរ គឺតាង

$\mathrm{v} = \alpha x + \beta$ នោះ $\mathrm{dv} = \alpha\, dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{\alpha}\, dv$ ។

យើងបាន៖

$$\int \frac{q}{\alpha x + \beta}\, \mathrm{d}x = \int \frac{q}{v} \cdot \frac{1}{\alpha} \mathrm{dv} = \frac{q}{\alpha} \int \frac{dv}{v}$$

---

[១០] យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ៖ *អាំងតេក្រាលកំណត់* ទំព័រទី៤១និងទី៤២ ឆ្នាំ១៩៩៧

$$=\frac{q}{\alpha}\ln|v|+c=\frac{q}{\alpha}\ln|\alpha x+\beta|+c \quad (1.24)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

១.៥. អាំងតេក្រាល Improper [១១]

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងសិក្សាអាំងតេក្រាល Improper មានបីទម្រង់ដូចតទៅ។

និយមន័យ គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,+\infty)$ ។ យើងកំណត់

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{N\to+\infty}\int_a^{N} f(x)\,dx \quad (1.25)$$ ។

ប្រសិនបើលីមីតនេះមាននិងកំណត់ នោះយើងនិយាយថា អាំងតេក្រាល $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ជាអាំងតេក្រាលរួម ហើយករណីផ្សេងទៀត យើងនិយាយថា វាជាអាំងតេក្រាលរីក។ គេថា $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាល Improper ។

និយមន័យ គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty\,,b]$ ។ យើងកំណត់

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{N\to-\infty}\int_N^{b} f(x)\,dx \quad (1.26)$$ ។

ប្រសិនបើលីមីតនេះមាននិងកំណត់ នោះយើងនិយាយថា អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ ជាអាំងតេក្រាលរួម ហើយករណីផ្សេងទៀត យើងនិយាយថា វាជាអាំងតេក្រាលរីក។ គេថា $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ ជាអាំងតេក្រាល Improper ។

និយមន័យ គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។ ប្រសិនបើអាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ និង $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ ទាំងពីររួម ចំពោះចំនួនពិត c មួយចំនួន នោះយើងកំណត់

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \quad (1.27)$$

[១១] http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/improper.2/

និងយើងនិយាយថា អាំងតេក្រាល $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ នេះរួម ហើយករណីផ្សេងទៀត យើងនិយាយថា វាជាអាំងតេក្រាល

រីក។ គេថា $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាល Improper ។

១.៦. ផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយផ្នែកនៃខ្សែកោង

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយផ្នែកនៃខ្សែកោងមួយឬពីរតាមការគណនាអាំងតេក្រាល។

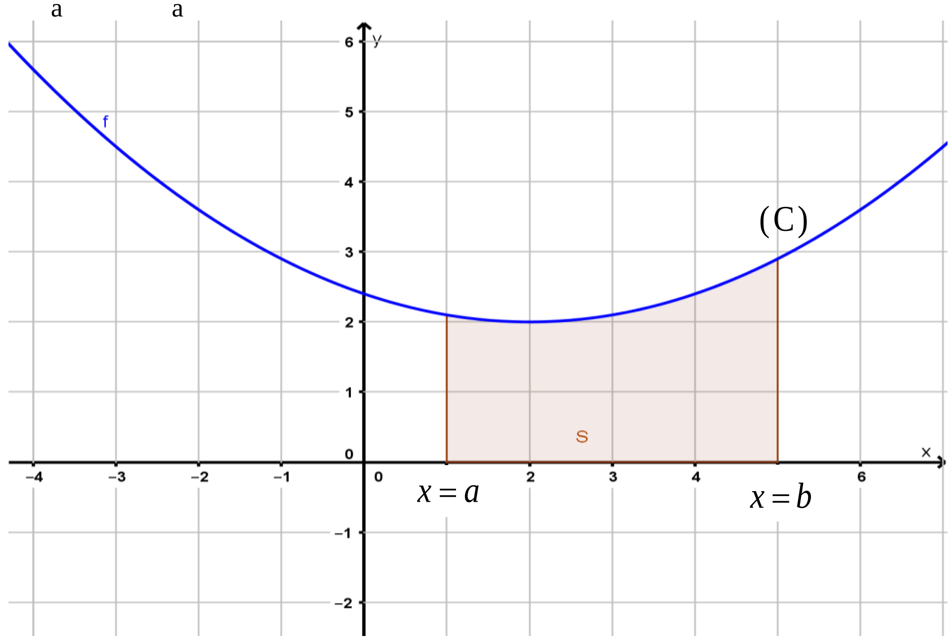
និយមន័យ គេមាន $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,b]$ $(a<b)$ ។ ផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ៖

$$S=\int_a^b |y|\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx \quad (1.28)$$ [១២] ។

– បើ $y=f(x)\ge 0$ ចំពោះ $\forall x\in[a\,,b]$ នោះយើងបាន៖

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \quad (1.29)$$ (សូមមើលរូបទី២)។

រូបទី២

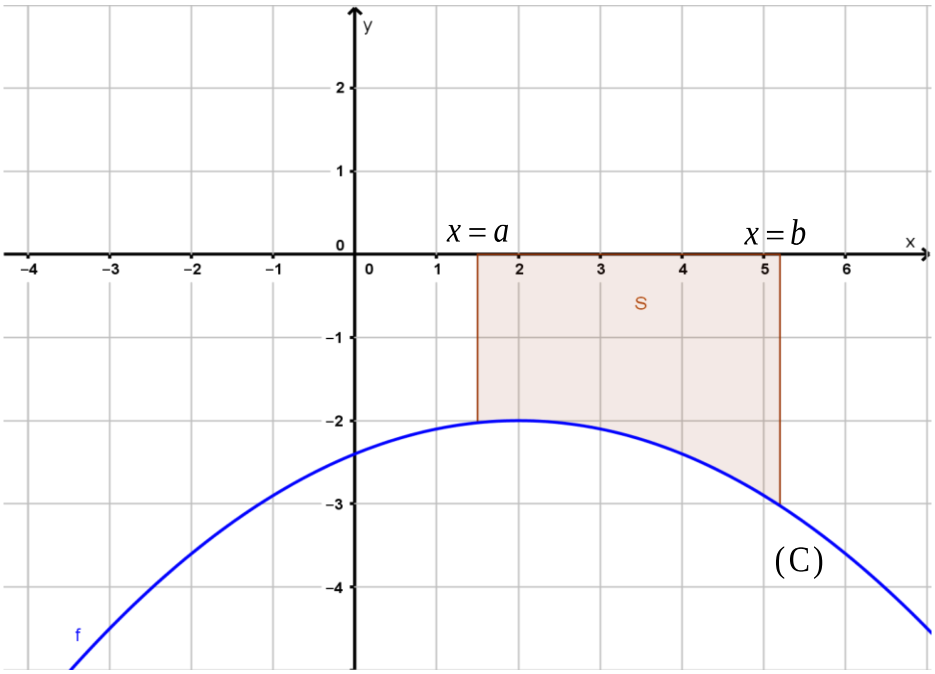


[១២] ក្រុមអ្នកនិពន្ធ៖ *គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២* កម្រិតខ្ពស់ បោះពុម្ពផ្សាយដោយគ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយនៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១៤ ទំព័រទី៧០

– បើ $y=f(x)\le 0$ ចំពោះ $\forall x\in[a\,,b]$ នោះយើងបាន៖

$$S=-\int_a^b y\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx \quad (1.30)$$ (សូមមើលរូបទី៣)។

រូបទី៣



និយមន័យ គេមាន $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,b]$ $(a<b)$ ។ ផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ និងខ្សែកោង (C_1) នៃអនុគមន៍ $y=g(x)$ ជាមួយបន្ទាត់ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ៖

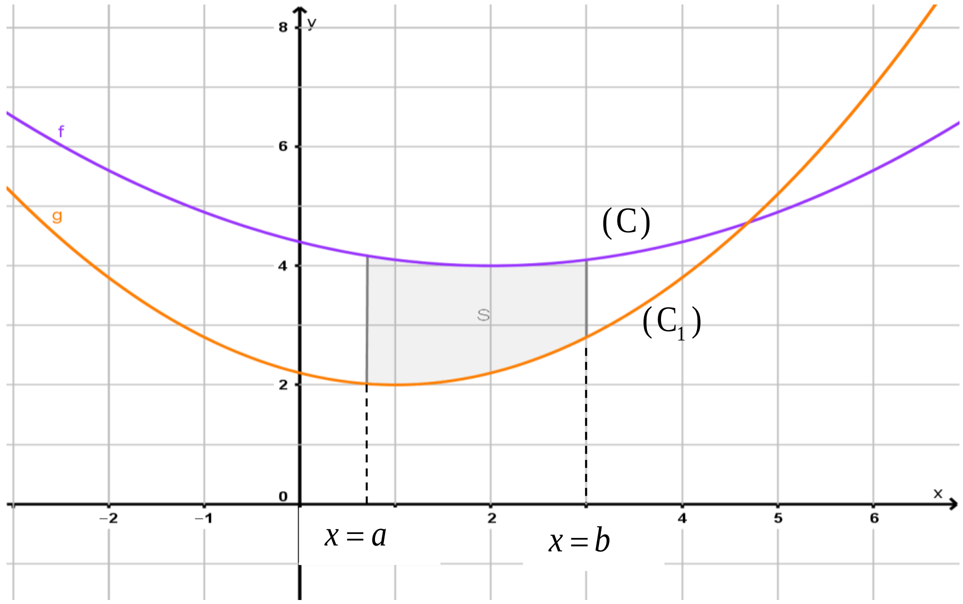
$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \quad (1.31)$$ [១៣] ។

– បើ $f(x)\ge g(x)$ ចំពោះ $\forall x\in[a\,,b]$ នោះយើងបាន៖

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \quad (1.32)$$ (សូមមើលរូបទី៤)។

[១៣] ក្រុមអ្នកនិពន្ធ -ដ.ឯ.ម- ទំព័រទី៧២

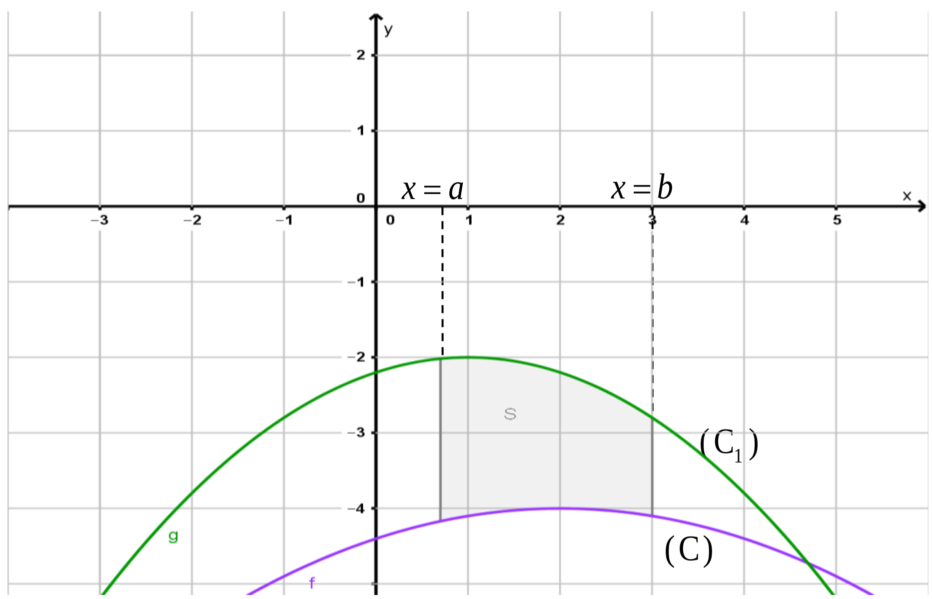
រូបទី៤



– បើ $f(x) \le g(x)$ ចំពោះ $\forall x \in [a\,,b]$ នោះយើងបាន៖

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \quad (1.33)$$ (សូមមើលរូបទី៥)។

រូបទី៥



១.៧. មាឌនៃសូលីដបរិវត្ត

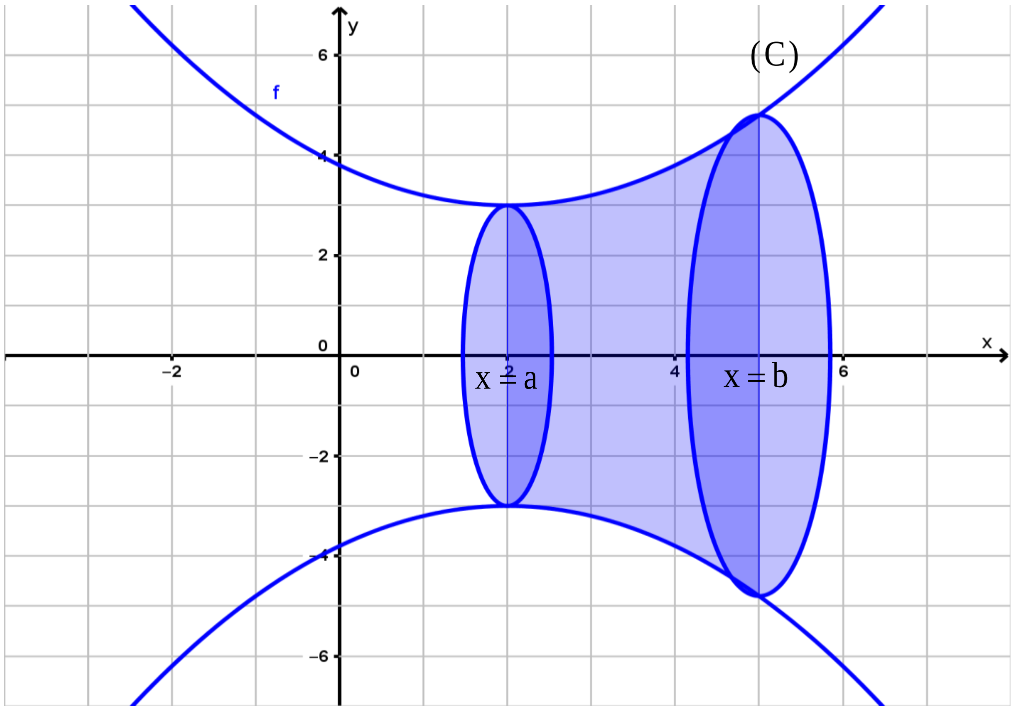
ក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីមាឌនៃសូលីដបរិវត្តតាមការគណនាអាំងតេក្រាល។

និយមន័យ គេមាន $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់មិនអវិជ្ជមានលើចន្លោះ $[a\,,b]$ $(a<b)$។ មាឌនៃសូលីដបរិវត្តដែលកកើតឡើងដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍

$y=f(x)$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ (សូមមើលរូបទី៦) កំណត់ដោយៈ

$$V=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi[f(x_k)]^2\Delta x=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx \quad (1.34)$$ [១៤] ។

រូបទី៦



និយមន័យ គេមាន $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,b]$ $(a<b)$ ។ មាឌនៃសូលីដបរិវត្តដែលកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C):y=f(x)$ និង $(C_1):y=g(x)$ លើចន្លោះ $[a\,,b]$ កំណត់ដោយៈ

$$V=\pi\int_a^b\left|[f(x)]^2-[g(x)]^2\right|dx \quad (1.35)$$ [១៥] ។

– បើ $f(x)\ge g(x)$ ចំពោះ $\forall x\in[a\,,b]$ (សូមមើលរូបទី៧) នោះយើងបានៈ

$$V=\pi\int_a^b[[f(x)]^2-[g(x)]^2]\,dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx-\pi\int_a^b[g(x)]^2\,dx \quad (1.36)$$ ។

– បើ $f(x)\le g(x)$ ចំពោះ $\forall x\in[a\,,b]$ នោះយើងបានៈ

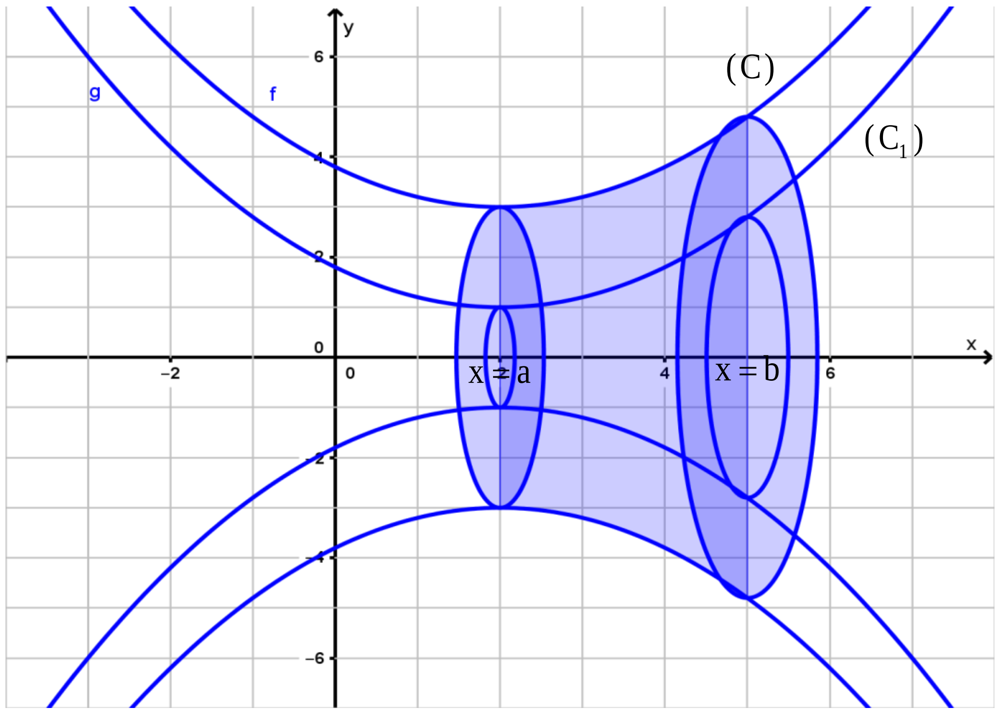
---

[១៤] https://www.rit.edu/studentaffairs/asc/sites/rit.edu.studentaffairs.asc/files/docs/services/resources/handouts/C8_VolumesbyIntegration_BP_9_22_14.pdf

[១៥] https://www.rit.edu/studentaffairs/asc/sites/rit.edu.studentaffairs.asc/files/docs/services/resources/handouts/C8_VolumesbyIntegration_BP_9_22_14.pdf

$$V = \pi \int_a^b [[g(x)]^2 - [f(x)]^2]\, dx = \pi \int_a^b [g(x)]^2\, dx - \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx \quad (1.37)$$ ។

រូបទី៧



១.៨. កំណើនឡូជីស្ទីក

ក្នុងស្ថានភាពជាច្រើនដែលមានកំណើនស្ថិតិសាកល (Population Growth) តែកំណើននេះទាល់លើដោយតម្លៃអតិបរមាខ្លះ។ ប្រភេទនៃកំណើននេះ ហៅថា កំណើនឡូជីស្ទីក (Logistic Growth) ដែលកំណើនស្ថិតិសាកល គឺសមាមាត្រទាំងពីរទៅនឹងទំហំនៃស្ថិតិសាកលនិងផលសងរវាងទំហំនៃស្ថិតិសាកលនិងតម្លៃអតិបរមា។

គេមាន $y = y(t)$ តាងជាទំហំនៃស្ថិតិសាកលនៅរយៈពេល t និងឧបមាថា $0 < y(t) < L$ មានន័យថា y ទាល់ក្នុងចន្លោះបើក 0 និង L ។ នោះគេបាន $y(t)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលកំណត់ដោយៈ

$$\frac{dy}{dt} = k\,y(L-y) \quad (1.38)$$ [១៦]

ដែល k ជាចំនួនពិតថេរ។

យើងអាចដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (1.38) ដោយប្រើវិធីញែកអថេរគឺៈ

$$\int \frac{1}{y(L-y)}\, dy = \int k\, dt$$

---

[១៦] https://www.math.ucdavis.edu/~thomases/W11_16C1_lec_1_10_11.pdf, p. 1

$$\frac{1}{L^2}\int \frac{Ly+L(L-y)}{y(L-y)}\,dy=\int k\,dt$$

$$\int \frac{1}{L(L-y)}\,dy+\int \frac{1}{Ly}\,dy=\int k\,dt$$

$$-\frac{1}{L}\ln|L-y|+\frac{1}{L}\ln|y|=kt+c$$

$$\frac{1}{L}\ln\left|\frac{y}{L-y}\right|=kt+c$$

$$\ln\left|\frac{y}{L-y}\right|=Lkt+Lc$$

$$\left|\frac{y}{L-y}\right|=e^{Lkt+Lc}=e^{Lc}e^{Lkt}$$

$$\frac{y}{L-y}=\pm e^{Lc}e^{Lkt}=Ae^{Lkt}\ ,\ A=\pm e^{Lc}$$

$$y=LAe^{Lkt}-Aye^{Lkt}\quad (y\neq L)$$

$$y\left(1+Ae^{Lkt}\right)=LAe^{Lkt}$$

$$y=\frac{LAe^{Lkt}}{1+Ae^{Lkt}}=\frac{L}{1+\frac{1}{A}e^{-Lkt}}=\frac{L}{1+be^{-kLt}}\ ,\ b=\frac{1}{A}\ ។$$

ដូច្នេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (1.38) គឺ៖

$$y=y(t)=f(t)=\frac{L}{1+be^{-kLt}}=\frac{L}{1+be^{-at}}$$

ដែល b , k , L ជាចំនួនពិតថេរ ហើយ $a=kL$, $L>0$ ។

១.៩. អនុគមន៍ឡូជីស្ទីក

និយមន័យ អនុគមន៍ឡូជីស្ទីក (Logistic Function) ជាអនុគមន៍ $y=f(t)$ កំណត់ដោយរូបមន្តខាងក្រោម៖

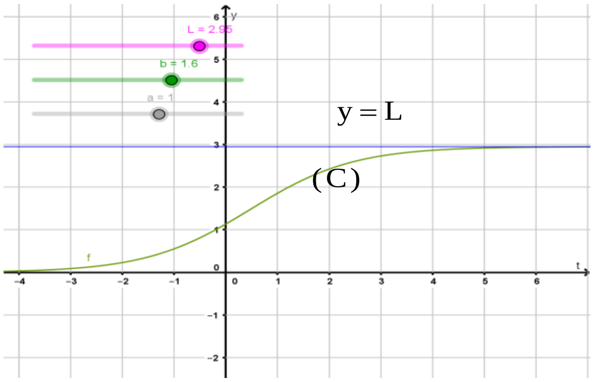
$$y=f(t)=\frac{L}{1+be^{-at}}\quad (1.39)$$ [១៧]

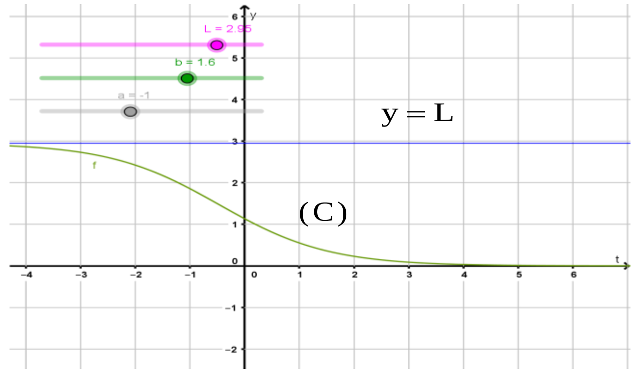
ដែល b , k , L ជាចំនួនពិតថេរ ហើយ $a=kL$ និង $L>0$ ។ អនុគមន៍នេះ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (1.38) ។ វាជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ បើ $b\geq 0$ និងជាប់លើ $\mathbb{R}-\{-\frac{1}{a}\ln(-\frac{1}{b})\}$ បើ $b<0$ និង $a\neq 0$ ។ ប៉ុន្តែបើ $a=0$ នោះវាក៏ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ផងដែរ។

---

[១៧] http://pages.uoregon.edu/anderson/math241/Lecture6.pdf, p. 1

ចំពោះករណី $b>0$ នោះខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ឡូជីស្ទីក (1.39) មានរាងទូទៅពីរគឺ៖





រូបទី៨៖ ករណី $b>0$ និង $a>0$ **រូបទី៩៖** ករណី $b>0$ និង $a<0$

ក្នុងករណីនេះ យើងមាន $f(t)=\dfrac{L}{1+be^{-at}}=\dfrac{Le^{at}}{e^{at}+b}=\left(\dfrac{L}{e^{at}+b}\right)e^{at}$ ។

ចំពោះតម្លៃនៃ t តូច នោះ

$$f(t)\approx\left(\frac{L}{1+b}\right)e^{at}$$

ដែលជាតម្លៃប្រហែលនឹងអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

ករណីពិសេស បើ a និង b ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន នោះអនុគមន៍ឡូជីស្ទីក (1.39) ហៅថាជា អនុគមន៍កំណើនឡូជីស្ទីក (Logistic Growth Function)[១៨] ។ ដោយ $a=kL$ និង $L>0$ នាំឱ្យ $k>0$ ។

ខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍កំណើនឡូជីស្ទីក (1.39) មានលក្ខណៈសម្គាល់ដូចតទៅ៖

– បន្ទាត់ $y=0$ និង $y=L$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ពីព្រោះ $\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{L}{1+be^{-at}}=0$ និង $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{L}{1+be^{-at}}=L$ ។

– ចំណុចកាត់អ័ក្ស y គឺ $\left(0\,,\dfrac{L}{1+b}\right)$ ។

– ដែនកំណត់នៃ $y=f(t)$ គឺ $D=\mathbb{R}$ និងសំណុំតម្លៃគឺ $0<y<L$ ។

– ខ្សែកោង (C) នៃ $y=f(t)$ កើនពីឆ្វេងទៅស្តាំ។ នៅខាងឆ្វេងនៃចំណុចកំណើនអតិបរមា (Maximum Growth) $\left(\dfrac{\ln b}{a}\,,\dfrac{L}{2}\right)$ នោះអត្រានៃការកើនឡើងគឺកើន ហើយនៅខាងស្តាំនៃចំណុចនេះ នោះអត្រានៃការកើនឡើងគឺកើនថយចុះ។

---

[១៨] http://www.cengage.com/resource_uploads/downloads/1133109489_499145.pdf, p. 433

១.១០. កំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេ

១.១០.១. សមីការឡូជីស្ទីកក្នុងរូបវិទ្យា

សមីការឡូជីស្ទីក ជាសមីការកំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេធម្មតា និង យើងសិក្សាអំពីលក្ខណៈរបស់វាខាងក្រោម។

តាង $N = N(t)$ ជាទំហំនៃស្ថិតិសាកលនៅរយៈពេល t ។ យើងជឿជាក់ថា $N(t) \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ពេល t ពីព្រោះស្ថិតិសាកលមិនអាចអវិជ្ជមានបានទេ។ យើងនឹងសន្មតថា ទំហំនៃស្ថិតិសាកលដើមបានស្គាល់គឺ $N(0) = N_0$ ។ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលឡូជីស្ទីកថ្លែងថា អត្រាបម្រែបម្រួលនៃស្ថិតិសាកលកំណត់ដោយៈ

$$\frac{dN}{dt} = k\,N\left(\frac{K-N}{K}\right) \quad (1.40)$$ [១៩]

ដែល $k > 0$ ហៅថា អត្រាកំណើនខាងក្នុង (Intrinsic Growth Rate) និង $K > 0$ ហៅថា កាប៉ាស៊ីតេបញ្ជូន (Carrying Capacity)។ ជះត្រឡប់ថា ទំហំនៃស្ថិតិសាកលដែលអាចទ្រទ្រង់ដោយបរិយាកាសដែលមាន។ ម្យ៉ាងទៀត គេហៅសមីការនេះថាជា ច្បាប់កំណើនកែប្រែ (Modified Growth Law) ។

១.១០.២. ការដាក់កម្រិតសមីការ និង ចម្លើយ

ទម្រង់នៃសមីការអាចសម្រួលបាន ប្រសិនបើយើងវាស់ស្ថិតិសាកលជាឯកតានៃកាប៉ាស៊ីតេបញ្ជូនជំនួសឱ្យចំនួនឯកត្តលក្ខណៈ មានន័យថា បើយើងកំណត់បរិមាណថ្មី

$$y(t) = \frac{N(t)}{K} \text{ ។}$$

ទម្រង់នេះ ហៅថា ការដាក់កម្រិត (Scaling)។ យើងចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (1.40) នឹងចំនួនថេរ K ។ នាំឱ្យ

$$\frac{1}{K}\cdot\frac{dN}{dt} = \frac{k}{K}\cdot N\left(\frac{K-N}{K}\right) \text{ ។}$$

ឥឡូវនេះ យើងផ្តុំតួឱ្យសមស្របជារាង

$$\frac{d\left(\frac{N}{K}\right)}{dt} = k\cdot\left(\frac{N}{K}\right)\left(1-\left(\frac{N}{K}\right)\right) \text{ ។}$$

ដោយជំនួស $\frac{N}{K}$ ដោយ $y = y(t)$ នោះយើងបានសមីការកម្រិតនិងលក្ខខណ្ឌដើមកំណត់ដោយៈ

$$\frac{dy}{dt} = k\,y\left(1-y\right) \quad (1.41)\ ;\ y(0) = y_0$$ [២០]

យើងឃើញថា អថេរ $y = y(t)$ វាស់ទំហំស្ថិតិសាកលជាឯកតានៃកាប៉ាស៊ីតេបញ្ជូន និង $y(0) = y_0 = \frac{N(0)}{K} = \frac{N_0}{K}$ ជាថ្នាក់ស្ថិតិសាកលដើមតាមកម្រិត។ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលឡូជីស្ទីក (1.41) ជាសមីការមិនលីនេអ៊ែ មានន័យថា

---

[១៩] http://ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math103/site2010/keshet.notes/Chapter9.pdf, p. 191

[២០] http://ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math103/site2010/keshet.notes/Chapter9.pdf, p. 192

អថេរ y កើតមានឡើងក្នុងកន្សោមមិនលីនេអ៊ែ (មានដឺក្រេទី២) ក្នុងសមីការ។ ក្នុងផ្នែក ៣.១. យើងបានដោះស្រាយសមីការ (1.41) រួចមកហើយក្នុងករណីដែល $L=1$ ។ ហេតុនេះ យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះគឺ៖

$$y = y(t) = \frac{L}{1+be^{-kLt}} = \frac{1}{1+be^{-kt}}$$ ។

ប៉ុន្តែ យើងមានលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=y_0$ សមមូល $\frac{1}{1+b}=y_0$ ។

នាំឱ្យ $b=\frac{1}{y_0}-1=\frac{1-y_0}{y_0}$ ។

ដូចនេះ យើងបានចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (1.41) ដែលមានលក្ខខណ្ឌដើមគឺ៖

$$y = y(t) = \frac{1}{1+\frac{1-y_0}{y_0}\cdot e^{-kt}} = \frac{y_0}{y_0+(1-y_0)e^{-kt}} \quad (1.42)$$ [២១]

ដែល $k>0$ និង $y_0 \geq 0$ ។

១.១០.៣. អត្ថន័យនៃចម្លើយ

យើងបានមកដល់ត្រង់អនុគមន៍ដែលពណ៌នាអំពីស្ថិតិសាកលតាមកម្រិត ជាអនុគមន៍នៃពេលដែលអាចព្យាករដោយសមីការឡូជីស្ទីកកម្រិត (Scaled Logistic Equation) (1.41) ។ ថ្នាក់នៃស្ថិតិសាកល (គិតជាឯកតានៃកាប៉ាស៊ីតេបញ្ជូន K) ទៅតាមអនុគមន៍អាស្រ័យពេលគឺមានសមីការ (1.42) ។

យើងអាចផ្លាស់ប្តូរលទ្ធផលនេះទៅកន្សោមសមមូលសម្រាប់ស្ថិតិសាកលសរុបគ្មានកម្រិត $N(t)$ ដោយហៅត្រឡប់មកវិញថា $y(t)=\frac{N(t)}{K}$ ។ ដោយជំនួសកន្សោមនេះសម្រាប់ $y(t)$ និង $y_0=\frac{N_0}{K}$ នោះសមីការ (1.42) នាំឱ្យបាន៖

$$N(t) = \frac{1}{1+\frac{K-N_0}{N_0}e^{-kt}} = \frac{N_0}{N_0+(K-N_0)e^{-kt}} \quad (1.43)$$ [២២]

ដែល $k>0$ និង $N_0 \geq 0$ ។

នាំឱ្យ $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=1$ និង $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=K$ ។

ដូចនេះ ស្ថិតិសាកលនឹងតាំងលំនៅទៅក្នុងថ្នាក់ថេរ មានន័យថាជា ស្ថានភាពលំនឹង (Steady State) ដែលគ្មានបម្រែបម្រួលនឹងកើតឡើងទេ។

[២១] http://ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math103/site2010/keshet.notes/Chapter9.pdf, p. 194

[២២] http://ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math103/site2010/keshet.notes/Chapter9.pdf, p. 195

ម្យ៉ាងទៀត ដោយយក $\frac{dy}{dt}=0$ នោះតាមសមីការ (1.41) យើងរកឃើញថា

$k\,y(1-y)=0$ សមមូល $y=0$ ឬ $y=1$ ជាស្ថានភាពលំនឹង។

ស្រដៀងគ្នាដែរតាមសមីការ (1.40) យើងក៏បាន $\frac{dN}{dt}=0$ សមមូល $k\,N\left(\frac{K-N}{K}\right)=0$ សមមូល $N=0$ ឬ $N=K$ ជាស្ថានភាពលំនឹង។ វាបានបញ្ជាក់ថា កាលពីពេលមុនបើគ្មានស្ថិតិសាកល នោះវាអាចមិនមានកំណើនស្ថិតិសាកល ហើយក្រោយមកវាបានជះត្រឡប់ថា $N=K$ មានន័យថា កាប៉ាស៊ីតេបញ្ជូនជាទំហំស្ថិតិសាកលដែលនឹងទ្រទ្រង់ដោយបរិយាកាស។

១.១១. កម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ

និយមន័យ មានកម្លាំង $F=F(x)$ មួយធ្វើអំពើលើអង្គធាតុតាមបណ្ដោយអ័ក្សអាប់ស៊ីស ដែលនាំឱ្យមានបម្លាស់ទីពី $x=\alpha$ ទៅ $x=\beta$ $(0<\alpha<\beta)$។ គេនិយាយថា កម្លាំង F នេះបំពេញកម្មន្ត (Work) ដែលមានតម្លៃស្មើនឹង

$$W=\int_{\alpha}^{\beta}F(x)\,dx \quad (1.44)$$ [២៣] ។

ជាឧទាហរណ៍ កម្លាំងកំរាញភាពយឺតរបស់រ៉ឺស្ស័រកំណត់ដោយ

$$F=-k\,x$$

ដែល k ជាមេគុណកំរាញរបស់រ៉ឺស៊័រ និង x ជាបម្លាស់ទីពី α ទៅ β $(0<\alpha<\beta)$។ ពីរូបមន្ត (1.44) យើងបានបំពេញកម្មន្តពីកម្លាំង F គឺ

$$W=\int_{\alpha}^{\beta}F(x)\,dx=-\int_{\alpha}^{\beta}k\,x\,dx=-k\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\alpha}^{\beta}=-\frac{k}{2}\left(\beta^2-\alpha^2\right)$$ ។

ជាសរុប ជំពូកទី១បានផ្ដល់នូវចំណេះដឹងខាងនិយមន័យនៃព្រីមីទីវ និង អាំងតេក្រាល ទ្រឹស្ដីបទ រូបមន្តគ្រឹះលក្ខណៈជាច្រើននៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់និងអាំងតេក្រាលកំណត់ កំណើនឡូជីស្ទីក អនុគមន៍ឡូជីស្ទីក ហើយនិងកំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេ។ ជាងនេះទៅទៀត ជំពូកទី១នេះបានផ្ដល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ អាំងតេក្រាលកំណត់ និង អាំងតេក្រាល Improper តាមនិយមន័យ រូបមន្តងាយ និង វិធីប្ដូរអថេរដោយអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ ជាពិសេស យើងបានអនុវត្តអាំងតេក្រាល ដើម្បីរកផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយផ្នែកនៃខ្សែកោងមួយឬពីរ រកមាឌនៃសូលីដបរិវត្តក្នុងលំហ និង រកកម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ។ បន្ទាប់មកយើងនឹងបង្ហាញនិងសិក្សាអំពីដំណោះស្រាយអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៅក្នុងជំពូកទី២បន្តទៀត។

[២៣] សឿន សម្បត្តិ -ដ.ឯ.ម- ទំព័រទី៦៨

ជំពូកទី២
ដំណោះស្រាយអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
(Solutions of Integrals Involving Exponential Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី២នេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $\int \frac{dx}{\left(p+q a^{\alpha x}\right)^{n}}$ ដែល $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$, $n\in\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, ...\}$ និង ដំណោះស្រាយរបស់វា។ ប៉ុន្តែដោយមានទំនាក់ទំនងរវាងគ្នា ជាដំបូង យើងនឹងដោះស្រាយអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលសិន។

២.១ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$

អាំងតេក្រាល $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $a^{\alpha x+\beta}$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ ជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$ យើងប្រើវិធីប្តូរអថេរដោយតាង $t=a^{\alpha x+\beta}$ $(\alpha\neq 0)$ នាំឱ្យ $\ln t=\ln a^{\alpha x+\beta}=(\alpha x+\beta)\ln a$ $(a>0\,,\,a\neq 1)$ នាំឱ្យ $x=\frac{1}{\alpha}(\frac{\ln t}{\ln a}-\beta)$ និង $dx=\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t}$ ។

នាំឱ្យ $$\int a^{\alpha x+\beta}\,dx=\int t\frac{1}{\alpha\ln a}\,\frac{dt}{t}=\frac{1}{\alpha\ln a}\int dt$$
$$=\frac{1}{\alpha\ln a}\,t+c=\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha\ln a}+c \quad (*)$$
ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $a=e$, $\alpha=1$, $\beta=0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជារូបមន្ត

$$\int e^{x}\,dx=e^{x}+c \quad (2.1)$$ [២៤]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

[២៤] Herbert Bristol Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data,* 1957, p. 126

- បើ $\alpha = 1$, $\beta = 0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជារូបមន្ត

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (2.2)$$ [២៥]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- បើ $a = e$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int e^{\alpha x + \beta}\, dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x + \beta} + c \quad (2.3)$$ [២៦]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ចំពោះករណីទូទៅ តាមសមីការ $(*)$ ផ្ដល់ឱ្យ

$$\int a^{\alpha x + \beta}\, dx = \frac{a^{\alpha x + \beta}}{\alpha \ln a} + c \quad (2.4)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0$, $a \neq 1$។

ឥឡូវនេះ យើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^{+\infty} e^{a x}\, dx$ ។

តាមរូបមន្ត (2.3) និង $a \neq 0$ យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{a x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{a x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{a} e^{a x}\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{a}\left(e^{a b} - 1\right) \quad (*)$$ ។

ប្រសិនបើ $a = x + i y \in \mathbb{C}$ ដែល $\mathrm{Re}(a) = x < 0$ នាំឱ្យ

$$\lim_{b \to +\infty} e^{a b} = \lim_{b \to +\infty} e^{(x + i y) b} = \lim_{b \to +\infty} e^{x b + i y b}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{\cos yb + i \sin yb}{e^{-x b}}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{\cos yb}{e^{-x b}} + i \lim_{b \to +\infty} \frac{\sin yb}{e^{-x b}} = 0 + i \cdot 0 = 0$$

---

[២៥] Herbert Bristol Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data,* 1957, p. 126

[២៦] https://cambomaths.files.wordpress.com/2010/03/1300_math_formulas.pdf, p. 242

និងតាមសមីការ $(*)$ យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{a x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{a}\left(e^{a b}-1\right) = \frac{1}{a}(0-1) = -\frac{1}{a}$$

ឬ $$\int_0^{+\infty} e^{a x}\, dx = -\frac{1}{a} \quad (2.5)$$

ដែល $\mathrm{Re}(a) < 0$ ។

យើងអាចទាញបាន៖

$$\int_0^{+\infty} e^{-a x}\, dx = \frac{1}{a} \quad (2.6)$$ [២៧]

ដែល $-\mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(-a) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(a) > 0$ ។

២.២. អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}}$

អាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}}$ $(a>0\,,\ a\neq 1\,,\ \alpha\neq 0)$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{p+q a^{\alpha x}}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}}$ យើងប្រើវិធីប្តូរអថេរដោយតាង $t = p + q a^{\alpha x}$ $(\alpha\neq 0)$

នាំឱ្យ $x = \frac{\ln(t-p)-\ln q}{\alpha \ln a}$ និង $dx = \frac{1}{\alpha \ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}$ ។

នាំឱ្យ $$\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\alpha \ln a}\cdot\frac{dt}{t-p} = \frac{1}{\alpha \ln a}\int \frac{1}{t(t-p)}\, dt \quad (*)$$ ។

- បើ $p=0$ និង $q\neq 0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int \frac{dx}{p+q a^{\alpha x}} = \int \frac{dx}{q a^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha \ln a}\int \frac{1}{t^2}\, dt$$

[២៧] Herbert Bristol Dwight, ***Tables of Integrals and Other Mathematical Data***, New York, Macmillan Company, Third Edition, 1957., p. 200

$$= \frac{1}{\alpha \ln a} \int t^{-2} dt = \frac{1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{t^{-1}}{(-1)} + c$$

$$= \frac{-1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{1}{t} + c = \frac{-1}{\alpha \ln a} \cdot \frac{1}{q a^{\alpha x}} + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha \neq 0$ ។

- បើ $p \neq 0$ នាំឱ្យសមីការ $(*)$ ទៅជា

$$\int \frac{dx}{p + q a^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha \ln a} \int \frac{1}{t(t-p)} dt = \frac{1}{\alpha p \ln a} \int \frac{t - (t-p)}{t(t-p)} dt$$

$$= \frac{1}{\alpha p \ln a} \int \left(\frac{1}{t-p} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{\alpha p \ln a} \left(\ln|t-p| - \ln|t| \right) + c_1$$

$$= \frac{1}{\alpha p \ln a} \left(\ln\left| p + q a^{\alpha x} - p \right| - \ln\left| p + q a^{\alpha x} \right| \right) + c$$

$$= \frac{1}{\alpha p \ln a} \left(\alpha x \ln a - \ln\left| p + q a^{\alpha x} \right| \right) + c$$

$$= \frac{x}{p} - \frac{1}{\alpha p \ln a} \ln\left| p + q a^{\alpha x} \right| + c$$

ដែល c_1 , c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha \neq 0$ ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha \neq 0$ យើងបានរូបមន្តៈ

$$\int \frac{dx}{p + q a^{\alpha x}} = \begin{cases} \dfrac{-1}{\alpha q \ln a} \cdot \dfrac{1}{a^{\alpha x}} + c & \text{បើ } p = 0 \text{ , } q \neq 0 \\ \dfrac{x}{p} - \dfrac{1}{\alpha p \ln a} \ln\left| p + q a^{\alpha x} \right| + c & \text{បើ } p \neq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$ [២៨]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណីពិសេស បើ $a = e$ និង $p \neq 0$ នាំឱ្យរូបមន្ត (2.7) ទៅជា

$$\int \frac{dx}{p + q e^{\alpha x}} = \frac{x}{p} - \frac{1}{\alpha p} \ln\left| p + q e^{\alpha x} \right| + c \quad (2.8)$$ [២៩]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

---

[២៨] https://www.facebook.com/photo?fbid=2182412998728192&set=a.1380543128915187

[២៩] Karl Smith, *Student Mathematics Handbook and Integral Table for Calculus,* 2002, p. 242

បន្ទាប់មក យើងចង់ពង្រីកការគណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{a^{\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}}$ និង $\int \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}}$ ដែល $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha \neq 0$ ដោយប្រើប្រាស់រូបមន្ត (2.7)។

យើងបាន៖

$$\int \frac{a^{\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}} = \frac{1}{q}\int \frac{(p+q\,a^{\alpha x})-p}{p+q\,a^{\alpha x}}\,dx = \frac{1}{q}\int dx - \frac{p}{q}\int \frac{dx}{p+q\,a^{\alpha x}}$$

$$= \frac{1}{q}\,x - \frac{p}{q}\left[\frac{x}{p} - \frac{1}{\alpha\, p\ln a}\ln\left|\,p+q\,a^{\alpha x}\,\right|\right] + c \text{ (រូបមន្ត (2.7))}$$

$$= \frac{1}{\alpha\, q\ln a}\ln\left|\,p+q\,a^{\alpha x}\,\right| + c$$

និង

$$\int \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}} = \frac{1}{q^2}\int \frac{\left[(p+q\,a^{\alpha x})-p\right]^2}{\left(p+q\,a^{\alpha x}\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{q^2}\int \frac{\left(p+q\,a^{\alpha x}\right)^2 - 2p\left(p+q\,a^{\alpha x}\right)+p^2}{\left(p+q\,a^{\alpha x}\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{q^2}\int\left(p+q\,a^{\alpha x}\right)dx - \frac{2p}{q^2}\int dx + \frac{p^2}{q^2}\int \frac{1}{p+q\,a^{\alpha x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{q}\int a^{\alpha x}\,dx - \frac{p}{q^2}\int dx + \frac{p^2}{q^2}\int \frac{1}{p+q\,a^{\alpha x}}\,dx$$

$$= \frac{a^{\alpha x}}{\alpha\, q\ln a} - \frac{p\,x}{q^2} + \frac{p^2}{q^2}\left[\frac{x}{p} - \frac{1}{\alpha\, p\ln a}\ln\left|\,p+q\,a^{\alpha x}\,\right|\right] + c \text{ (រូបមន្ត (2.7))}$$

$$= \frac{a^{\alpha x}}{\alpha\, q\ln a} - \frac{p}{\alpha\, q^2\ln a}\ln\left|\,p+q\,a^{\alpha x}\,\right| + c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ និង $q\neq 0$ យើងបានរូបមន្ត៖

$$\int \frac{a^{\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha\, q\ln a}\ln\left|\,p+q\,a^{\alpha x}\,\right| + c \qquad (2.9)$$

និង

$$\int \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}} = \frac{a^{\alpha x}}{\alpha\, q \ln a} - \frac{p}{\alpha\, q^2 \ln a} \ln\left| p + q\,a^{\alpha x} \right| + c \qquad (2.10)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

- ករណីពិសេស បើ $a = e$ នាំឱ្យរូបមន្ត (2.9) និង (2.10) ទៅជា

$$\int \frac{e^{\alpha x}\,dx}{p+q\,e^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha\, q} \ln\left| p + q\,e^{\alpha x} \right| + c \qquad (2.11)$$

និង

$$\int \frac{e^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,e^{\alpha x}} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha\, q} - \frac{p}{\alpha\, q^2} \ln\left| p + q\,e^{\alpha x} \right| + c \qquad (2.12)$$ [៣០]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ពីរូបមន្ត (2.9) និង (2.10) ដោយអនុវត្តន៍ចំពោះ ($a > 1,\ \alpha < 0,\ p \neq 0,\ q \neq 0$ និង $p + q \neq 0$) ឬ ($0 < a < 1,\ \alpha > 0,\ p \neq 0,\ q \neq 0$ និង $p + q \neq 0$) យើងបាន៖

$$\int_0^{+\infty} \frac{a^{\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} \frac{a^{\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\alpha\, q \ln a} \ln\left| p + q\,a^{\alpha x} \right| \Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{\alpha\, q \ln a} \lim_{t\to+\infty} \left[\ln\left| p + q\,a^{\alpha t} \right| - \ln\left| p+q \right| \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha\, q \ln a} \ln\left| p \right| - \frac{1}{\alpha\, q \ln a} \ln\left| p+q \right|$$

ឬ $$\int_0^{+\infty} \frac{a^{\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha\, q \ln a} \ln\left| \frac{p}{p+q} \right| \qquad (2.13)$$

និង

$$\int_0^{+\infty} \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} \frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}} = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{a^{\alpha x}}{\alpha\, q \ln a} - \frac{p}{\alpha\, q^2 \ln a} \ln\left| p + q\,a^{\alpha x} \right| \right] \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{a^{\alpha t}}{\alpha\, q \ln a} - \frac{p}{\alpha\, q^2 \ln a} \ln\left| p + q\,a^{\alpha t} \right| - \frac{1}{\alpha\, q \ln a} + \frac{p}{\alpha\, q^2 \ln a} \ln\left| p+q \right| \right]$$

$$= 0 - \frac{p}{\alpha\, q^2 \ln a} \ln\left| p \right| - \frac{1}{\alpha\, q \ln a} + \frac{p}{\alpha\, q^2 \ln a} \ln\left| p+q \right|$$

---

[៣០] http://is.muni.cz/el/1431/podzim2014/F5170/um/integrals.pdf, p. 2

ឬ $$\int_0^{+\infty}\frac{a^{2\alpha x}\,dx}{p+q\,a^{\alpha x}}=-\frac{1}{\alpha\,q\ln a}+\frac{p}{\alpha\,q^2\ln a}\ln\left|\frac{p+q}{p}\right| \quad (2.14)$$ ។

២.៣. អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង $\int\frac{dx}{\left(p+q\,a^{\alpha x}\right)^n}$

អាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{(p+q\,a^{\alpha x})^n}$ $(a>0\,,\,a\neq 1\,,\,\alpha\neq 0\,,\,n\in\{2, 3, 4, ...\})$ ជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល $\frac{1}{(p+q\,a^{\alpha x})^n}$ ។ អនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $a^{\alpha x}$ ។

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{dx}{(p+q\,a^{\alpha x})^n}$ យើងតាង $t=p+q\,a^{\alpha x}$ $(\alpha\neq 0)$ នាំឱ្យ

$x=\frac{\ln(t-p)-\ln q}{\alpha\ln a}$ និង $dx=\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}$ ។

នាំឱ្យ $$\int\frac{dx}{(p+q\,a^{\alpha x})^n}=\int\frac{1}{t^n}\cdot\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{dt}{t-p}=\frac{1}{\alpha\ln a}\int\frac{1}{t^n(t-p)}dt \quad (*_1)$$ ។

- បើ $p=0$ និង $q\neq 0$ នាំឱ្យសមីការ $(*_1)$ ទៅជា

$$\int\frac{dx}{(p+q\,a^{\alpha x})^n}=\int\frac{dx}{(q\,a^{\alpha x})^n}=\frac{1}{\alpha\ln a}\int\frac{1}{t^{n+1}}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha\ln a}\int t^{-(n+1)}dt=\frac{1}{\alpha\ln a}\cdot\frac{t^{-n}}{(-n)}+c$$

$$=\frac{-1}{n\,\alpha\ln a}\cdot\frac{1}{t^n}+c=\frac{-1}{n\,\alpha\ln a}\cdot\frac{1}{(q\,a^{\alpha x})^n}+c$$

$$=\frac{-1}{n\,\alpha\,q^n\ln a}\cdot\frac{1}{a^{n\alpha x}}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0\,,\,a\neq 1\,,\,\alpha\neq 0$ ។

- បើ $p\neq 0$ នោះយើងនឹងគណនាអាំងតេក្រាល $\int\frac{1}{t^n(t-p)}dt$ ។ អាំងតេក្រាលនេះមាន

កន្សោមអាំងតេក្រាល $\dfrac{1}{t^n(t-p)}$ ដែលអាចបំបែកជាប្រភាគងាយតាមវិធីប្រភាគដោយផ្នែក។

យើងមាន៖

$$\frac{1}{t^n(t-p)}=\frac{A}{t-p}+\frac{B_1}{t}+\frac{B_2}{t^2}+\frac{B_3}{t^3}+\ldots+\frac{B_n}{t^n}\quad(*_2)$$

$$=\frac{At^n+B_1(t-p)t^{n-1}+B_2(t-p)t^{n-2}+\ldots+B_{n-1}(t-p)t+B_n(t-p)}{t^n(t-p)}$$

នាំឱ្យ

$$1=At^n+B_1(t-p)t^{n-1}+B_2(t-p)t^{n-2}+\ldots+B_{n-1}(t-p)t+B_n(t-p)$$

ឬ $\quad 1=(A+B_1)t^n+(-pB_1+B_2)t^{n-1}+\ldots+(-pB_{n-1}+B_n)t+(-pB_n)$ ។

ដោយផ្ទឹមមេគុណនៃពហុធា យើងបាន៖

$$\begin{cases}A+B_1=0\\-pB_1+B_2=0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\-pB_{n-1}+B_n=0\\-pB_n=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-B_1\\pB_1=B_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\pB_{n-1}=B_n\\B_n=-1/p=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-B_1=1/p^n\\B_1=\lambda/p^{n-1}=-1/p^n\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\B_{n-1}=\lambda/p=-1/p^2\\B_n=-1/p=\lambda\end{cases}$$

ពីសមីការ $(*_2)$ ទៅជា៖

$$\frac{1}{t^n(t-p)}=\frac{1}{p^n(t-p)}-\frac{1}{p^nt}-\frac{1}{p^{n-1}t^2}-\frac{1}{p^{n-2}t^3}-\ldots-\frac{1}{p^2t^{n-1}}-\frac{1}{pt^n}$$

$$=\frac{1}{p^n(t-p)}-\frac{1}{p^nt}-\frac{t^{-2}}{p^{n-1}}-\frac{t^{-3}}{p^{n-2}}-\ldots-\frac{t^{-(n-1)}}{p^2}-\frac{t^{-n}}{p}\text{ ។}$$

នាំឱ្យ

$$\int\frac{1}{t^n(t-p)}dt=\frac{1}{p^n}\int\frac{dt}{t-p}-\frac{1}{p^n}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{p^{n-1}}\int t^{-2}dt-\frac{1}{p^{n-2}}\int t^{-3}dt$$

$$-\ldots-\frac{1}{p^2}\int t^{-(n-1)}dt-\frac{1}{p}\int t^{-n}dt$$

$$=\frac{1}{p^n}\ln|t-p|-\frac{1}{p^n}\ln|t|-\frac{t^{-1}}{p^{n-1}(-1)}-\frac{t^{-2}}{p^{n-2}(-2)}-\dots-\frac{t^{-n+2}}{p^2(-n+2)}-\frac{t^{-n+1}}{p(-n+1)}+c_1$$

$$=\frac{1}{p^n}\ln|t-p|-\frac{1}{p^n}\ln|t|+\frac{1}{p^{n-1}t}+\frac{1}{2p^{n-2}t^2}+\dots+\frac{1}{(n-2)p^2t^{n-2}}+\frac{1}{(n-1)pt^{n-1}}+c_1$$

$$=\frac{1}{p^n}\ln\left|qa^{\alpha x}\right|-\frac{1}{p^n}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+\frac{1}{p^{n-1}\left(p+qa^{\alpha x}\right)}+\frac{1}{2p^{n-2}\left(p+qa^{\alpha x}\right)^2}$$

$$+\dots+\frac{1}{(n-2)p^2\left(p+qa^{\alpha x}\right)^{n-2}}+\frac{1}{(n-1)p\left(p+qa^{\alpha x}\right)^{n-1}}+c_1$$

$$=\frac{\alpha x}{p^n}\ln a-\frac{1}{p^n}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\,p^{n-k}\left(p+qa^{\alpha x}\right)^k}+c_2$$

ដែល c_1 , c_2 ជាចំនួនពិតថេរ និង $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ ។

ពីសមីការ $(*_1)$ ទៅជា៖

$$\int\frac{dx}{(p+qa^{\alpha x})^n}=\frac{x}{p^n}-\frac{1}{\alpha p^n\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+\frac{1}{\alpha\ln a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\,p^{n-k}\left(p+qa^{\alpha x}\right)^k}+c$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ដូចនេះ ចំពោះ $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$, $n\in\{2, 3, 4, \dots\}$ យើងបានរូបមន្ត៖

$$\int\frac{dx}{(p+qa^{\alpha x})^n}=\begin{cases}\dfrac{-1}{n\alpha q^n\ln a}\cdot\dfrac{1}{a^{n\alpha x}}+c & \text{បើ } p=0\,,\, q\neq 0\\[2ex] \dfrac{x}{p^n}-\dfrac{1}{\alpha p^n\ln a}\ln\left|p+qa^{\alpha x}\right|+\dfrac{1}{\alpha\ln a}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\,p^{n-k}(p+qa^{\alpha x})^k}+c & \text{បើ } p\neq 0\end{cases}\qquad(2.15)$$ [៣១]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

សម្គាល់ ខ្ញុំបានរៀបរៀងរូបមន្តអាំងតេក្រាល (2.7) និង (2.15) នេះនៅថ្ងៃទី១ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ២០១៥ ហើយបានធ្វើបទបង្ហាញវាចំនួនបីលើករួចមកហើយនៅ **មហោស្រពវិទ្យាសាស្ត្រនិងវិស្វកម្មកម្ពុជាលើកទី១** (២០១៥) និង **លើកទី២** (២០១៦) ហើយលើកទី៣នៅ **វេទិកាវិទ្យាសាស្ត្រ** រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ថ្ងៃទី៥-៦ ខែធ្នូ ឆ្នាំ២០១៦។

[៣១] https://www.facebook.com/photo?fbid=2182412998728192&set=a.1380543128915187

- ករណីពិសេស បើ $a=e$ និង $p\neq 0$ នាំឱ្យរូបមន្ត (2.9) ទៅជា

$$\int \frac{dx}{(p+qe^{\alpha x})^n}=\frac{x}{p^n}-\frac{1}{\alpha p^n}\ln\left|p+qe^{\alpha x}\right|+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\,p^{n-k}\left(p+qe^{\alpha x}\right)^k}+c \quad (2.16)$$

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ប្រសិនបើ យើងយក $n=2$ នាំឱ្យរូបមន្ត (2.15) ទៅជា

$$\int \frac{dx}{(p+qe^{\alpha x})^2}=\frac{x}{p^2}-\frac{1}{\alpha p^2}\ln\left|p+qe^{\alpha x}\right|+\frac{1}{\alpha p(p+qe^{\alpha x})}+c \quad (2.17)$$ [៣២]

ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។

ជាសរុប ជំពូកទី២បានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមួយចំនួនដូចជា $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$, $\int \frac{dx}{p+qa^{\alpha x}}$ និង $\int \frac{dx}{\left(p+qa^{\alpha x}\right)^n}$ ដោយបង្កើតបានជារូបមន្តថ្មីចំនួនប្រាំបីគឺរូបមន្ត (2.7) , (2.9) , (2.10) , (2.11) , (2.13) , (2.14) , (2.15) និង (2.16) ដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅ។ ជាបន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងសិក្សាអំពីការអនុវត្តអាំងតេក្រាលទាំងនេះលើអនុគមន៍ឡូជីស្ទីកក្នុងជំពូកទី៣។

[៣២] Karl Smith, ***Student Mathematics Handbook and Integral Table for Calculus,*** 2002, p. 242

ជំពូកទី៣
ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើអនុគមន៍ឡូជីស្ទីក
(Application of Integrals to Logistic Functions)

នៅក្នុងជំពូកទី៣នេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើកំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេ កម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ និង មាឌនៃសូលីដបរិវត្តដូចតទៅ។

៣.១. ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើកំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេ

តាមសមីការ (1.43) ជាទំហំនៃស្ថិតិសាកល (សរុបគ្មានកម្រិត) $N = N(t)$ នៅរយៈពេល t គឺ៖

$$N(t) = \frac{1}{1+\dfrac{K-N_0}{N_0}e^{-kt}} = \frac{N_0}{N_0+(K-N_0)e^{-kt}}$$

ដែល $k>0$ ជាអត្រាកំណើនខាងក្នុង និង K ជាកាប៉ាស៊ីតេបញ្ជូន ហើយ $N(0)=N_0$ ជាទំហំនៃស្ថិតិសាកលដើម ($0 \le N_0 < K$) ។

នាំឱ្យ $b=\dfrac{K-N_0}{N_0}>0$ និង $1+\dfrac{K-N_0}{N_0}e^{-kt}=1+be^{-kt}>0$ ហើយទំហំនៃស្ថិតិសាកល $N(t)=\dfrac{1}{1+be^{-kt}}$ ដែលជាអនុគមន៍ឡូជីស្ទីកជាប់លើចន្លោះ $[t_0\ ,\ t_1]$ $(0 \le t_0 < t_1)$ ។ នោះទំហំកំណើននៃស្ថិតិសាកលក្នុងរយៈពេលពី t_0 ទៅ t_1 គឺ៖

$$G = \int_{t_0}^{t_1} N(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{dt}{1+be^{-kt}} \quad (*) \text{ ។}$$

តាមសមីការ $(*)$ និង (2.7) ដោយជំនួស $p=1\,,\, q=b\,,\, a=e$ និង $\alpha=-k$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} G &= \int_{t_0}^{t_1}\frac{dt}{1+be^{-kt}} = \left[t+\frac{1}{k}\ln\left|1+be^{-kt}\right|\right]_{t_0}^{t_1} \\ &= t_1+\frac{1}{k}\ln\left|1+be^{-kt_1}\right| - t_0 - \frac{1}{k}\ln\left|1+be^{-kt_0}\right| \\ &= t_1-t_0+\frac{1}{k}\ln\left|\frac{1+be^{-kt_1}}{1+be^{-kt_0}}\right| = t_1-t_0+\frac{1}{k}\ln\left[\frac{N_0+(K-N_0)e^{-kt_1}}{N_0+(K-N_0)e^{-kt_0}}\right] \quad (3.1) \text{ ។} \end{aligned}$$

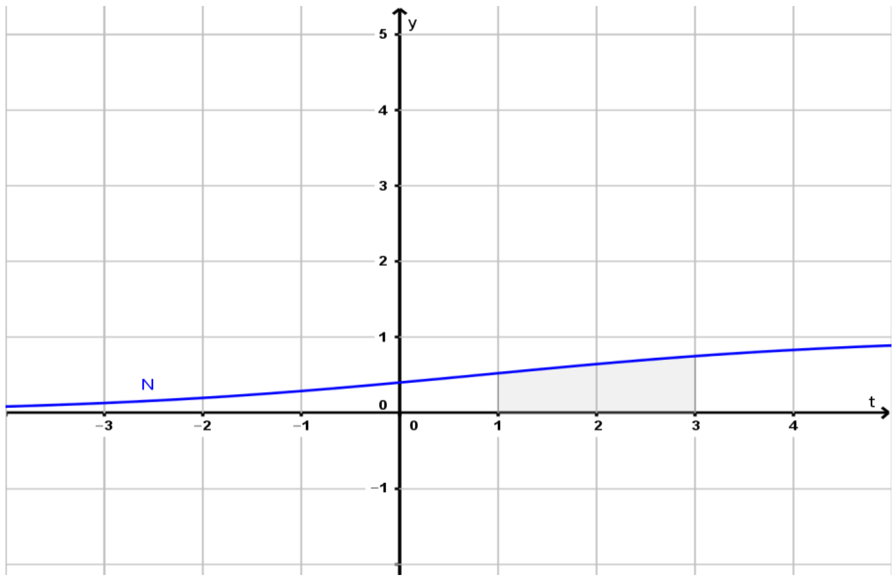
ជាឧទាហរណ៍ បើគេមាន $k=0.5$ ជាអត្រាកំណើនខាងក្នុង និង $K=10$ ជាកាប៉ាស៊ីតេបញ្ជូន ហើយ $N(0)=N_0=4$ ជាទំហំនៃស្ថិតិសាកលដើម នោះទំហំនៃស្ថិតិសាកល $N=N(t)$ ក្នុងរយៈពេល t គឺ៖

$$N(t)=\frac{1}{1+\frac{10-4}{4}e^{-0.5t}}=\frac{1}{1+1.5e^{-0.5t}}$$

ហើយតាមរូបមន្ត (3.1) យើងបានទំហំកំណើននៃស្ថិតិសាកលក្នុងរយៈពេលពី $t_0=1$ ទៅ $t_1=3$ (សូមមើលរូបទី១០)គឺ៖

$$G=\int_1^3 N(t)\,dt=(3-1)+\frac{1}{0.5}\ln\left[\frac{4+(10-4)e^{-0.5(3)}}{4+(10-4)e^{-0.5(1)}}\right]\approx 1.28$$ ។

រូបទី១០



៣.២. ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើកម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងសិក្សាលើកម្លាំង $F=F(x)$ ដែលជាអនុគមន៍ឡូជីស្ទីកមានទម្រង់ $\frac{L}{1+be^{-ax}}$ ឬជាអនុគមន៍មានទម្រង់ $\frac{c}{(1+be^{-ax})^n}$ ដើម្បីរកកម្មន្តរបស់វា។

– បើ $b\geq 0$ នោះ $1+be^{-ax}>0$ និងកម្លាំង $F=F(x)=\frac{L}{1+be^{-ax}}$ ដែលជាអនុគមន៍ឡូជីស្ទីកជាប់លើចន្លោះ $[\alpha\,,\beta]$ $(0<\alpha<\beta)$ ។ នោះតាមរូបមន្ត (1.44) យើងបានកម្មន្តនៃកម្លាំង F គឺ៖

$$W=\int_\alpha^\beta F(x)\,dx=L\int_\alpha^\beta\frac{dx}{1+be^{-ax}}\quad (*)$$ ។

តាមសមីការ $(*)$ និង (2.7) ដោយជំនួស $p=1\,,q=b\,,a=e$ និង $\alpha=-a$ នាំឱ្យ

$$W=L\int_\alpha^\beta\frac{dx}{1+be^{-ax}}=L\left[x+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-ax}\right|\right]_\alpha^\beta$$

$$=L\left[\beta+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-a\beta}\right|-\alpha-\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-a\alpha}\right|\right]$$

$$=L(\beta-\alpha)+\frac{L}{a}\ln\left|\frac{1+be^{-a\beta}}{1+be^{-a\alpha}}\right|=L(\beta-\alpha)+\frac{L}{a}\ln\left[\frac{1+be^{-a\beta}}{1+be^{-a\alpha}}\right] \quad (3.2)$$

ដែល $a\neq 0$ និង $b\geq 0$ ។

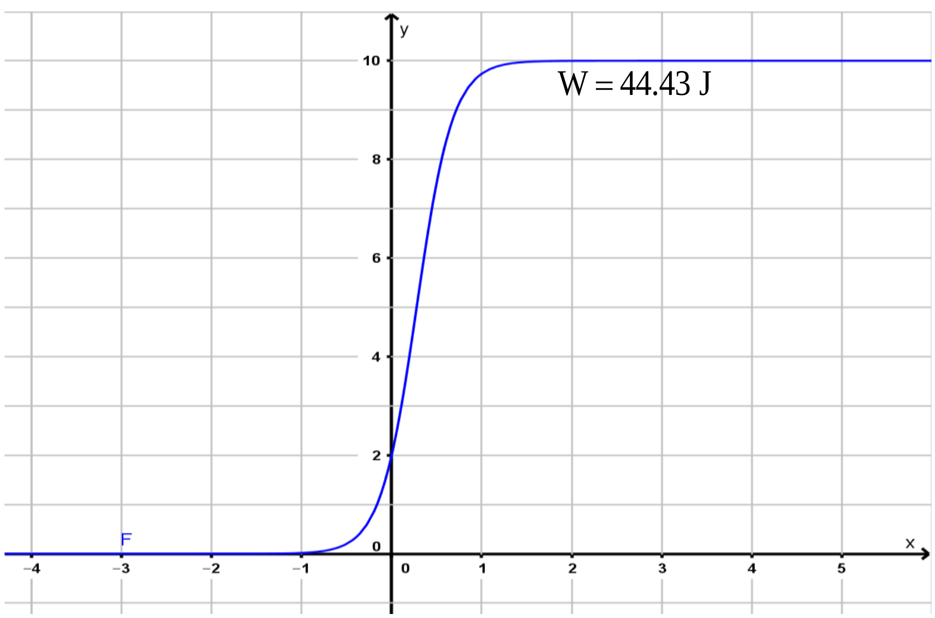
ជាឧទាហរណ៍ បើកម្លាំង F មានសមីការ $F(x)=\dfrac{10}{1+4e^{-5x}}$ ដែល x ជាបម្លាស់ទីពី $x=0.5\text{m}$ ទៅ $x=5\text{m}$ តាមបណ្ដោយអ័ក្សដេក (សូមមើលរូបទី១១) នោះតាមរូបមន្ត (3.2) យើងបានកម្មន្តដែលបានបំពេញពីកម្លាំង F គឺ៖

$$W=\int_{0.5}^{5}F(x)\,dx=10\int_{0.5}^{5}\frac{dx}{1+4e^{-5x}}$$

$$=10(5-0.5)+\frac{10}{5}\ln\left[\frac{1+4e^{-5(5)}}{1+4e^{-5(0.5)}}\right]$$

$$=45+2\ln\left(\frac{1+4e^{-25}}{1+4e^{-2.5}}\right)\approx 44.43\text{ J} \text{ ។}$$

រូបទី១១



– បើ $b\geq 0\,,\,n\in\mathbb{N}$ និងតាង $c=L^n$ នោះកម្លាំង $F=F(x)=\dfrac{c}{(1+be^{-ax})^n}$ ដែលជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[\alpha\,,\,\beta]$ $(0<\alpha<\beta)$ ។ នោះតាមរូបមន្ត (1.44) យើងបានកម្មន្តដែលបានបំពេញពីកម្លាំង F គឺ៖

$$W=\int_{\alpha}^{\beta}F(x)\,dx=c\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(1+be^{-ax})^n} \quad (*_1) \text{ ។}$$

តាមសមីការ $(*_1)$ និង (2.15) ដោយជំនួស $p=1\,,\,q=b\,,\,a=e$ និង $\alpha=-a$ នាំឱ្យ

$$W=c\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(1+be^{-ax})^n}=c\left[x+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-ax}\right|-\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1+be^{-ax})^k}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=c\left[\beta+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-a\beta}\right|-\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1+be^{-a\beta})^k}\right]-c\left[\alpha+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-a\alpha}\right|-\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1+be^{-a\alpha})^k}\right]$$

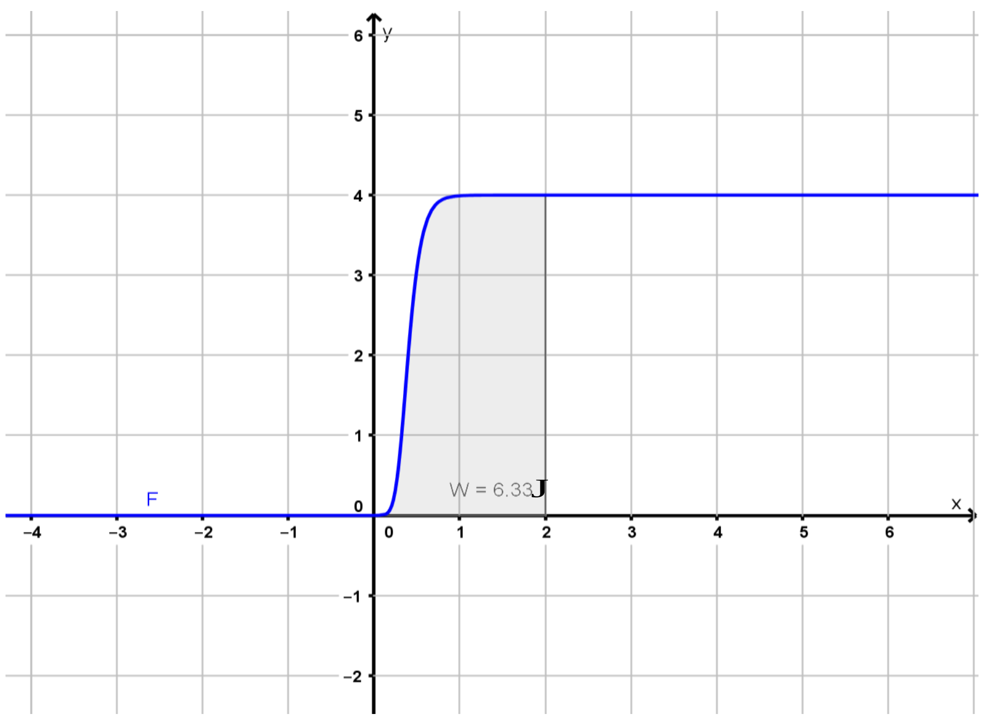
$$=c(\beta-\alpha)+\frac{c}{a}\ln\left[\frac{1+be^{-a\beta}}{1+be^{-a\alpha}}\right]+\frac{c}{a}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{k(1+be^{-a\alpha})^k}-\frac{1}{k(1+be^{-a\beta})^k}\right]\quad(3.3)$$

ដែល $c=L^n$, $a\neq 0$ និង $n\in\mathbb{N}$ ។

ជាឧទាហរណ៍ បើកម្លាំង F មានសមីការ $F(x)=\frac{4}{(1+8e^{-10x})^5}$ ធ្វើអំពើលើអង្គធាតុមួយតាមបណ្តោយអ័ក្សអាប់ស៊ីស ដែលនាំឱ្យមានបម្លាស់ទីពី $x=0\,m$ ទៅ $x=2\,m$ (សូមមើលរូបទី១២) នោះតាមរូបមន្ត (3.3) យើងបានកម្មន្តដែលបានបំពេញពីកម្លាំង F គឺ៖

$$W=\int_0^2 F(x)\,dx=4\int_0^2\frac{dx}{(1+8e^{-10x})^5}$$

$$=4(2-0)+\frac{4}{10}\ln\left|\frac{1+8e^{-20}}{1+8e^{0}}\right|+\frac{4}{10}\sum_{k=1}^{4}\left[\frac{1}{k(1+8e^{0})^k}-\frac{1}{k(1+8e^{-20})^k}\right]\approx 6.33\text{ J}\ ។$$



រូបទី១២

៣.៣. ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់

– បើអនុគមន៍ឡូជីស្ទីក $y=f(x)=\dfrac{L}{1+be^{-ax}}$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[\alpha,\beta]$ នោះផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ នេះជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=\alpha$ និង $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ កំណត់ដោយ៖

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|\,dx=L\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\left|1+be^{-ax}\right|}\quad(*_2)\quad(\text{ពីព្រោះ } L>0\ )\text{។}$$

ក. ករណី $b\geq 0$ នោះ $1+be^{-ax}>0$ ហើយតាមសមីការ $(*_2)$ និង (2.7) ដោយជំនួស $p=1$, $q=b$, $a=e$ និង $\alpha=-a$ (សូមមើលរូបទី១៣) នាំឱ្យ

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx=L\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{1+be^{-ax}}=L\left[x+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-ax}\right|\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=L\left[\beta+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-a\beta}\right|-\alpha-\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-a\alpha}\right|\right]$$

$$=L(\beta-\alpha)+\frac{L}{a}\ln\left|\frac{1+be^{-a\beta}}{1+be^{-a\alpha}}\right|=L(\beta-\alpha)+\frac{L}{a}\ln\left[\frac{1+be^{-a\beta}}{1+be^{-a\alpha}}\right]\quad(3.4)$$

ដែល $a\neq 0$ និង $b\geq 0$ ។

ខ. ករណី $b<0$, $a>0$, $\beta\geq x\geq\alpha>-\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{1}{b}\right)$ នោះ $1+be^{-ax}>0$ និង $|f(x)|=f(x)$

ហើយ $S_1=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$ (គណនាវាតាម (3.4))។

គ. ករណី $b<0$, $a>0$, $\alpha\leq x\leq\beta<-\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{1}{b}\right)$ នោះ $1+be^{-ax}<0$ និង $|f(x)|=-f(x)$

ហើយ $S_2=-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$ (គណនាវាតាម (3.4))។

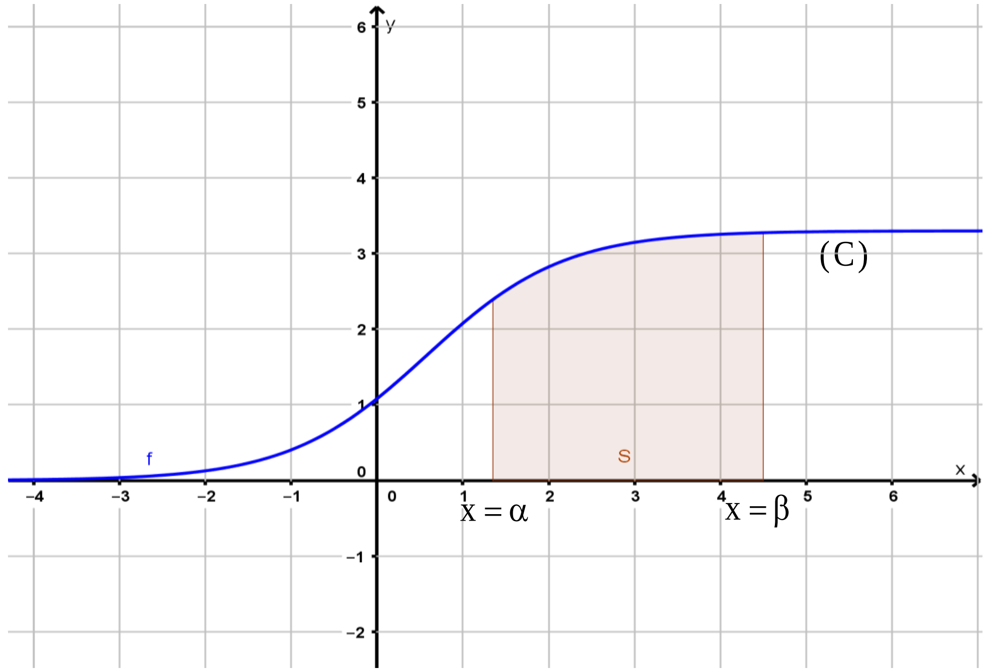
ឃ. ករណី $b<0$, $a<0$, $\beta\geq x\geq\alpha>-\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{1}{b}\right)$ នោះ $1+be^{-ax}<0$ និង $|f(x)|=-f(x)$

ហើយ $S_3=-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$ (គណនាវាតាម (3.4))។

ង. ករណី $b<0$, $a<0$, $\alpha\leq x\leq\beta<-\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{1}{b}\right)$ នោះ $1+be^{-ax}>0$ និង $|f(x)|=f(x)$

ហើយ $S_4=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$ (គណនាវាតាម (3.4))។

រូបទី១៣

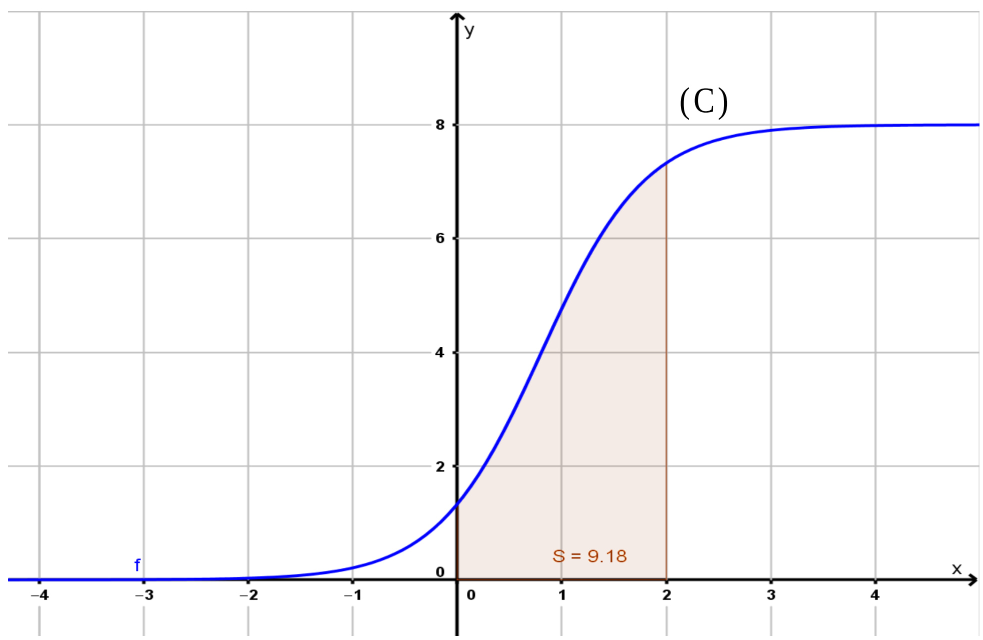


ជាឧទាហរណ៍ តាមរូបមន្ត (3.4) យើងបានផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{8}{1+5e^{-2x}}$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=0$ និង $x=2$ (សូមមើលរូបទី១៤)គឺ៖

$$S=\int_0^2 f(x)\,dx=8(2-0)+\frac{8}{2}\ln\left[\frac{1+5e^{-2(2)}}{1+5e^{-2(0)}}\right]$$

$$=16+4\ln\left(\frac{1+5e^{-4}}{6}\right)\approx 9.18$$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា។

រូបទី១៤



– បើគេមានអនុគមន៍ឡូជីស្ទីកពីរគឺ $y=f(x)=\dfrac{L}{1+b\,e^{-ax}}$ និង $y=g(x)=\dfrac{L_1}{1+b_1\,e^{-a_1x}}$ ដែល $b, b_1\ge 0$ នោះ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[\alpha\,,\beta]$ $(\alpha<\beta)$ ។ យើងបានផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ និងខ្សែកោង (C_1) នៃអនុគមន៍ $y=g(x)$ ជាមួយបន្ទាត់ $x=\alpha$ និង $x=\beta$ កំណត់ដោយៈ

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-g(x)\right|dx \quad (*_3) \text{ ។}$$

– បើ $f(x)\ge g(x)$ ចំពោះ $\forall x\in[\alpha\,,\beta]$ នោះតាមសមីការ $(*_3)$ និង (3.4) យើងបានៈ

$$S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx=L\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{1+b\,e^{-ax}}-L_1\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{1+b_1\,e^{-a_1x}}$$

$$=L(\beta-\alpha)+\frac{L}{a}\ln\left[\frac{1+b\,e^{-a\beta}}{1+b\,e^{-a\alpha}}\right]-L_1(\beta-\alpha)-\frac{L_1}{a_1}\ln\left[\frac{1+b_1\,e^{-a_1\beta}}{1+b_1\,e^{-a_1\alpha}}\right]$$

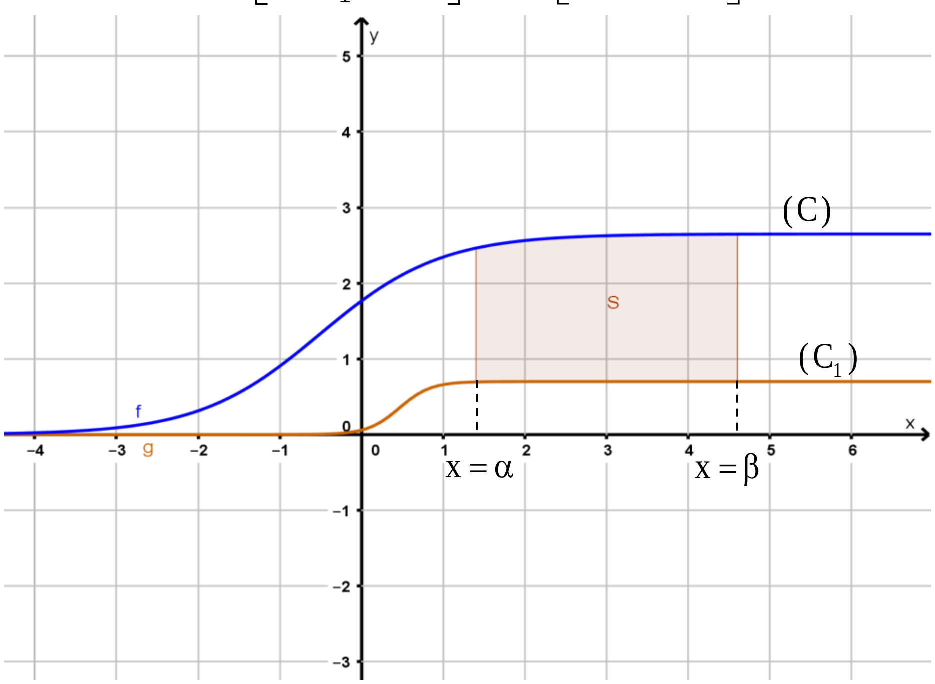
$$=(\beta-\alpha)(L-L_1)+\frac{L}{a}\ln\left[\frac{1+b\,e^{-a\beta}}{1+b\,e^{-a\alpha}}\right]-\frac{L_1}{a_1}\ln\left[\frac{1+b_1\,e^{-a_1\beta}}{1+b_1\,e^{-a_1\alpha}}\right] \quad (3.5)$$ (សូមមើលរូបទី១៥)។

– បើ $f(x)\le g(x)$ ចំពោះ $\forall x\in[\alpha\,,\beta]$ នោះតាមសមីការ $(*_3)$ និង (3.5) យើងបានៈ

$$S=\int_a^b[g(x)-f(x)]\,dx$$

$$=(\beta-\alpha)(L_1-L)+\frac{L_1}{a_1}\ln\left[\frac{1+b_1\,e^{-a_1\beta}}{1+b_1\,e^{-a_1\alpha}}\right]-\frac{L}{a}\ln\left[\frac{1+b\,e^{-a\beta}}{1+b\,e^{-a\alpha}}\right] \quad (3.6) \text{ ។}$$

រូបទី១៥



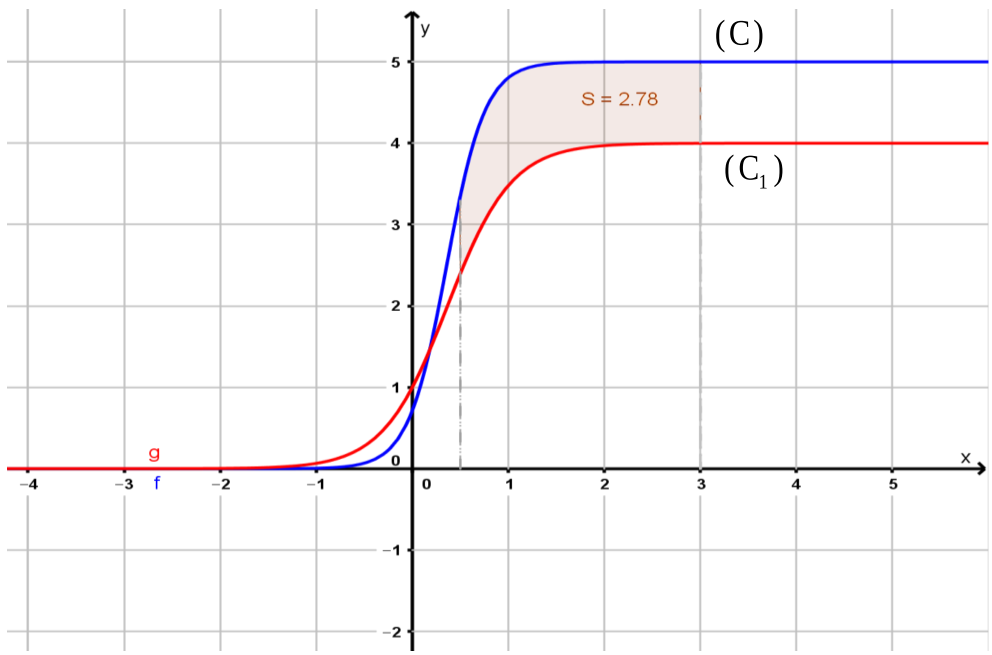
ជាឧទាហរណ៍ តាមរូបមន្ត (3.5) យើងបានផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{5}{1+6e^{-5x}}$ និងខ្សែកោង (C_1) តាងអនុគមន៍ $y = g(x) = \dfrac{4}{1+3e^{-3x}}$ ជាមួយបន្ទាត់ $x = 0.5$ និង $x = 3$ (សូមមើលរូបទី១៦)គឺ៖

$$S = \int_{0.5}^{3} [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$= (3-0.5)(5-4) + \frac{5}{5}\ln\left[\frac{1+6e^{-5(3)}}{1+6e^{-5(0.5)}}\right] - \frac{4}{3}\ln\left[\frac{1+3e^{-3(3)}}{1+3e^{-3(0.5)}}\right]$$

$$= 2.5 + \ln\left[\frac{1+6e^{-15}}{1+6e^{-2.5}}\right] - \frac{4}{3}\ln\left[\frac{1+3e^{-9}}{1+3e^{-1.5}}\right] \approx 2.78$$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា។

រូបទី១៦



យើងក៏អាចពង្រីកចំពោះអនុគមន៍ $y = g(x) = [f(x)]^n = \dfrac{L^n}{(1+be^{-ax})^n} = \dfrac{c}{(1+be^{-ax})^n}$ ដែល $c = L^n$ និង $n \in \mathbb{N}$ ។ វាជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ បើ $b \geq 0$ និងជាប់លើ $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{a}\ln(-\frac{1}{b})\}$ បើ $b < 0$ និង $a \neq 0$ ។ ប៉ុន្តែបើ $a = 0$ នោះវាក៏ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ផងដែរ។

បើអនុគមន៍ $y = g(x) = [f(x)]^n$ នេះជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ ។ នោះផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y = g(x)$ នេះជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x = \alpha$ និង $x = \beta$ កំណត់ដោយ៖

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, dx = c\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(1+be^{-ax})^n} \quad (*_4)$$ ។

តាមសមីការ $(*_4)$ និង (2.15) ដោយជំនួស $p=1$, $q=b$, $a=e$ និង $\alpha=-a$ នាំឱ្យ

$$S=c\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(1+be^{-ax})^n}=c\left[x+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-ax}\right|-\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1+be^{-ax})^k}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=c\left[\beta+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-a\beta}\right|-\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1+be^{-a\beta})^k}\right]-c\left[\alpha+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-a\alpha}\right|-\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1+be^{-a\alpha})^k}\right]$$

$$=c(\beta-\alpha)+\frac{c}{a}\ln\left|\frac{1+be^{-a\beta}}{1+be^{-a\alpha}}\right|+\frac{c}{a}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{k(1+be^{-a\alpha})^k}-\frac{1}{k(1+be^{-a\beta})^k}\right]\quad(3.7)$$

ដែល $c=L^n$, $a\neq 0$ និង $n\in\mathbb{N}$ ។

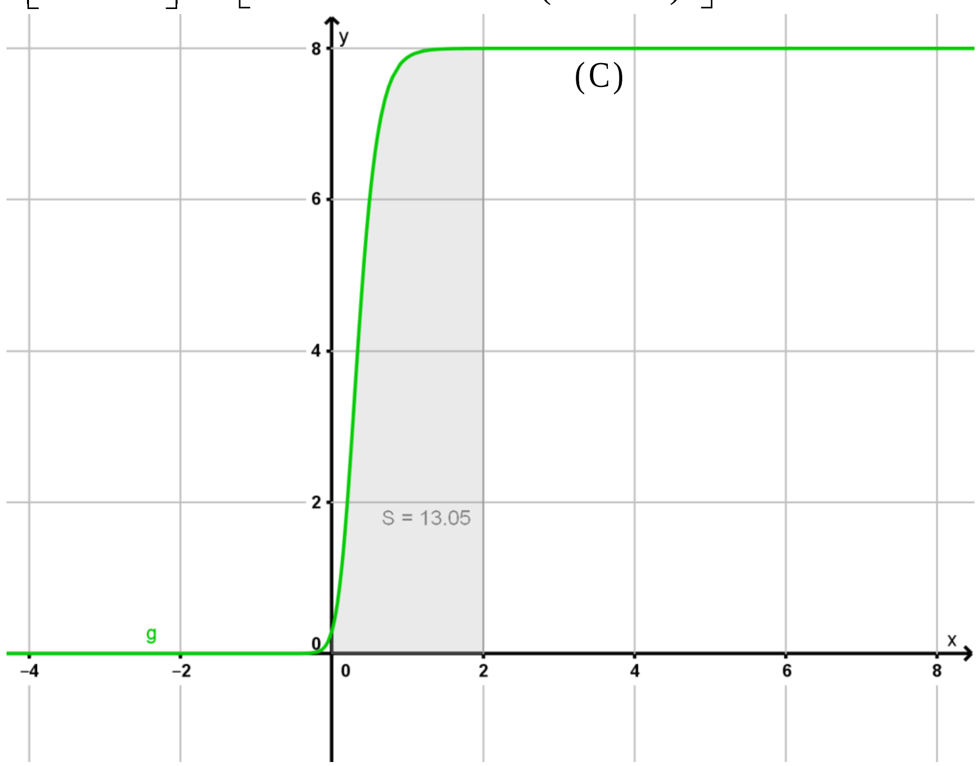
ជាឧទាហរណ៍ តាមរូបមន្ត (3.7) យើងបានផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y=g(x)=\dfrac{8}{(1+2e^{-6x})^3}$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=0$ និង $x=2$ (សូមមើលរូបទី១៧)គឺៈ

$$S=\int_0^2 g(x)\,dx=8\int_0^2\frac{dx}{(1+2e^{-6x})^3}$$

$$=8(2-0)+\frac{8}{6}\ln\left|\frac{1+2e^{-6(2)}}{1+2e^{-6(0)}}\right|+\frac{8}{6}\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{1}{k(1+2e^{-6(0)})^k}-\frac{1}{k(1+2e^{-6(2)})^k}\right]$$

$$=16+\frac{4}{3}\ln\left[\frac{1+2e^{-12}}{3}\right]+\frac{4}{3}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{1+2e^{-12}}+\frac{1}{18}-\frac{1}{2(1+2e^{-12})^2}\right]\approx 13.05$$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា។

រូបទី១៧



៣.៤. ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើមាឌនៃសូលីដបរិវត្ត

គេមានអនុគមន៍ឡូជីស្ទីក $y=f(x)=\dfrac{L}{1+be^{-ax}}$ ដែល $L>0$ និង $b\geq 0$ ។ នោះវាជាអនុគមន៍ជាប់មិនអវិជ្ជមានលើចន្លោះ $[\alpha\,,\beta]$ $(\alpha<\beta)$ ។ មាឌនៃសូលីដបរិវត្តដែលកកើតឡើងដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ នេះជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=\alpha$ និង $x=\beta$ កំណត់ដោយ៖

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}y^2\,dx=\pi\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2\,dx=\pi L^2\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(1+be^{-ax})^2}\quad(*_5)\ ។$$

តាមសមីការ $(*_5)$ និង (2.15) ដោយជំនួស $p=1\,,q=b\,,a=e\,,\ \alpha=-a$ និង $n=2$ នាំឱ្យ

$$V=\pi L^2\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(1+be^{-ax})^2}=\pi L^2\left[x+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-ax}\right|-\frac{1}{a(1+be^{-ax})}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\pi L^2\left[\beta+\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-a\beta}\right|-\frac{1}{a(1+be^{-a\beta})}-\alpha-\frac{1}{a}\ln\left|1+be^{-a\alpha}\right|+\frac{1}{a(1+be^{-a\alpha})}\right]$$

$$=\pi L^2\left[\beta-\alpha+\frac{1}{a}\ln\left[\frac{1+be^{-a\beta}}{1+be^{-a\alpha}}\right]-\frac{1}{a(1+be^{-a\beta})}+\frac{1}{a(1+be^{-a\alpha})}\right]\quad(3.8)$$

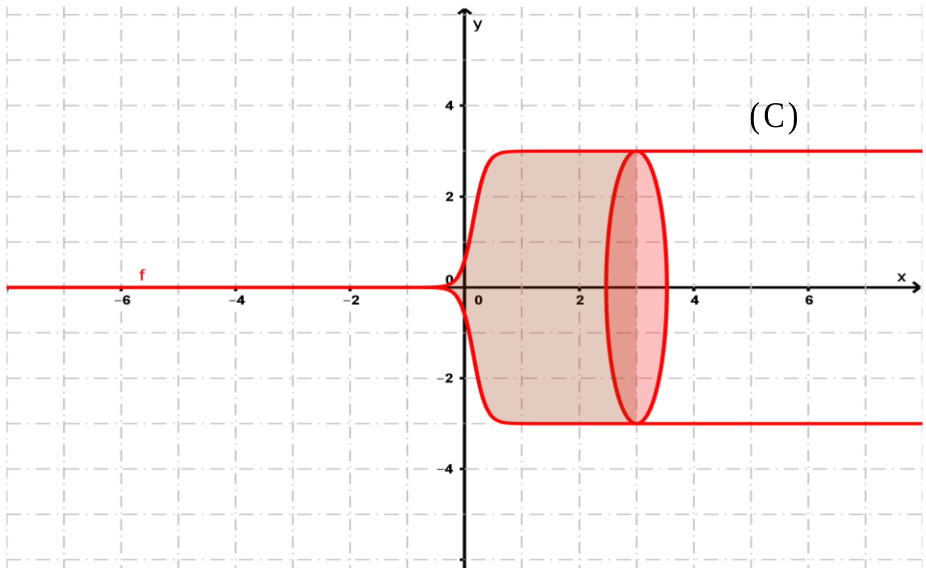
ដែល $a\neq 0$ និង $b\geq 0$ ។

ជាឧទាហរណ៍ តាមរូបមន្ត (3.8) យើងបានមាឌនៃសូលីដបរិវត្តដែលកកើតឡើងដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{3}{1+4e^{-9x}}$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=3$ (សូមមើលរូបទី១៨)គឺ៖

$$V=\pi\int_{-1}^{3}y^2\,dx=\pi 3^2\left[3+1+\frac{1}{9}\ln\left[\frac{1+4e^{-27}}{1+4e^{9}}\right]-\frac{1}{9(1+4e^{-27})}+\frac{1}{9(1+4e^{9})}\right]$$

≈ 77.32 ឯកតាមាឌ។

រូបទី១៨



ស្រដៀងគ្នាដែរ បើគេមានអនុគមន៍ $y=g(x)=\left[f(x)\right]^n=\dfrac{L^n}{(1+be^{-ax})^n}=\dfrac{c}{(1+be^{-ax})^n}$ ដែល $c=L^n$, $L>0$, $b\geq 0$ និង $n\in\mathbb{N}$ នោះ g ជាអនុគមន៍ជាប់មិនអវិជ្ជមានលើចន្លោះ $[\alpha,\beta]$ $(\alpha<\beta)$ ។ មាឌនៃសូលីដបរិវត្តដែលកកើតឡើងដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y=g(x)$ នេះជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=\alpha$ និង $x=\beta$ កំណត់ដោយ៖

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}[g(x)]^2\,dx=\pi L^{2n}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(1+be^{-ax})^{2n}}\quad(*_6)\ ។$$

ពីសមីការ $(*_6)$ និង (3.7) តាមការជំនួស n ដោយ 2n នាំឱ្យ

$$V=\pi L^{2n}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(1+be^{-ax})^{2n}}$$
$$=\pi L^{2n}\left\{\beta-\alpha+\frac{1}{a}\ln\left[\frac{1+be^{-a\beta}}{1+be^{-a\alpha}}\right]+\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{2n-1}\left[\frac{1}{k(1+be^{-a\alpha})^k}-\frac{1}{k(1+be^{-a\beta})^k}\right]\right\}\quad(3.9)$$

ដែល $a\neq 0$, $b\geq 0$ និង $n\in\mathbb{N}$ ។

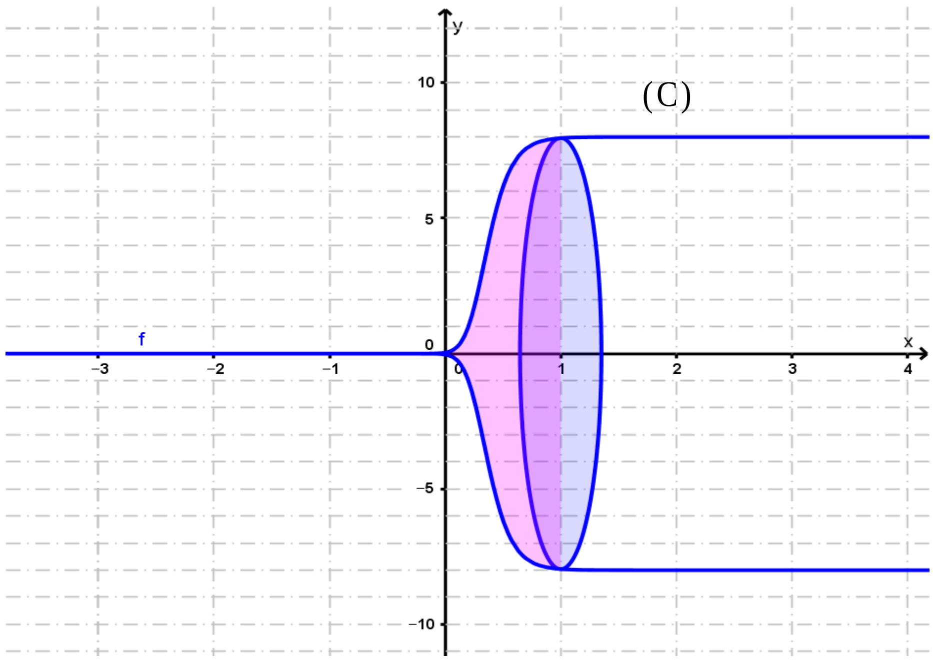
ជាឧទាហរណ៍ តាមរូបមន្ត (3.9) យើងបានមាឌនៃសូលីដបរិវត្តដែលកកើតឡើងដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y=g(x)=\dfrac{8}{(1+5e^{-8x})^3}$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=1$ (សូមមើលរូបទី១៩)គឺ៖

$$V = \pi \int_0^1 [g(x)]^2\,dx$$

$$= \pi 8^2 \{1 - 0 + \frac{1}{8}\ln\left[\frac{1+5e^{-8}}{6}\right] + \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{5}\left[\frac{1}{k\,6^k} - \frac{1}{k(1+5e^{-8})^k}\right]\}$$

≈ 103.47 ឯកតាមាឌ។

រូបទី១៩



ជាសរុបមក ជំពូកទី៣បានផ្តល់នូវចំណេះដឹងខាងអនុវត្តន៍អាំងតេក្រាល ដែលមានក្នុងជំពូកទី២លើអនុគមន៍ឡូជីស្ទីកដូចជា ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើកំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេ កម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ និង មាឌនៃសូលីដបរិវត្តភ្ជាប់ជាមួយនិងឧទាហរណ៍។ ជាពិសេស យើងបានបង្កើតជារូបមន្តថ្មីចំនួនប្រាំបួន គឺរូបមន្ត (3.1) , (3.2) , (3.3) , (3.4) , (3.5) , (3.6) , (3.7) , (3.8) និង (3.9) ដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅ។

សន្និដ្ឋាន

ជារួមមកវិញ យើងឃើញថា ជំពូកទី១បានផ្ដល់នូវចំណេះដឹងខាងនិយមន័យនៃព្រីមីទីវ និង អាំងតេក្រាល ទ្រឹស្ដីបទ រូបមន្តគ្រឹះ លក្ខណៈជាច្រើននៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់និងអាំងតេក្រាលកំណត់ កំណើនឡូជីស្ទីក អនុគមន៍ឡូជីស្ទីក ហើយនិងកំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេ។ ជាងនេះទៅទៀត ជំពូកទី១នេះបានផ្ដល់នូវវិធីសាស្ត្រ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ អាំងតេក្រាលកំណត់ និង អាំងតេក្រាល Improper តាមនិយមន័យ រូបមន្តងាយ និង វិធីប្ដូរអថេរដោយអនុវត្តន៍លើឧទាហរណ៍មួយចំនួន។ ជាពិសេស យើងបានអនុវត្តអាំងតេក្រាល ដើម្បីរកផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយផ្នែកនៃខ្សែកោងមួយឬពីរ រកមាឌនៃសូលីដបរិវត្តក្នុងលំហ និង រកកម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ។

ចំពោះជំពូកទី២បានផ្ដល់នូវវិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង អាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមួយចំនួនដូចជា $\int a^{\alpha x+\beta}\,dx$, $\int \frac{dx}{p+q\,a^{\alpha x}}$ និង $\int \frac{dx}{\left(p+q\,a^{\alpha x}\right)^n}$ ដោយបង្កើតបានជារូបមន្តថ្មីចំនួនប្រាំបីគឺរូបមន្ត (2.7) , (2.9) , (2.10) , (2.11) , (2.13) , (2.14) , (2.15) និង (2.16) ដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅ។

ចំពោះជំពូកទី៣វិញបានផ្ដល់នូវចំណេះដឹងខាងអនុវត្តន៍អាំងតេក្រាលដែលមានក្នុងជំពូកទី២លើអនុគមន៍ឡូជីស្ទីកដូចជា ការអនុវត្តអាំងតេក្រាលលើកំណើនអាស្រ័យដង់ស៊ីតេ កម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ ផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ និង មាឌនៃសូលីដបរិវត្តភ្ជាប់ជាមួយនិងឧទាហរណ៍។ ជាពិសេស យើងបានបង្កើតជារូបមន្តថ្មីចំនួនប្រាំបួនគឺរូបមន្ត (3.1) , (3.2) , (3.3) , (3.4) , (3.5) , (3.6) , (3.7) , (3.8) និង (3.9) ដើម្បីយកមកប្រើប្រាស់ជាលក្ខណៈទូទៅ។

ជាទីបញ្ចប់នេះ យើងខ្ញុំយល់ឃើញថាការសិក្សាស្រាវជ្រាវទៅលើប្រធានបទអំពី << **ការពង្រីកនិងការអនុវត្តអាំងតេក្រាលដែលមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៅក្នុងគណិតវិទ្យានិងរូបវិទ្យា** >> បានផ្ដល់ផលប្រយោជន៍ជាច្រើនទាំងខាងទ្រឹស្ដី (រូបមន្ត) និងការអនុវត្ត គឺជួយក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលប្រភេទខាងលើបានលឿន ហើយនិងប្រើប្រាស់វាក្នុងការរកផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ក្នុងប្លង់ មាឌនៃសូលីដបរិវត្តក្នុងលំហ ទំហំកំណើននៃស្ថិតិសាកល និង កម្មន្តនៃកម្លាំងអថេរ។ ជាងនេះទៅទៀត យើងនឹងទទួលនូវគំនិតនិងចំណេះដឹងថ្មីដែលកើតចេញអំពីប្រធានបទនៃស្នាដៃស្រាវជ្រាវនេះ និង យើងសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះ ជាឯកសារដ៏សំខាន់មួយសម្រាប់ជួយដល់ សិស្ស និស្សិត លោកគ្រូ និង អ្នកគ្រូ ដែលមានបញ្ហាខ្លះៗទាក់ទងនឹងការគណនាអាំងតេក្រាលទាំងកម្រិតមធ្យមសិក្សា ឧត្ដមសិក្សា និង ការអនុវត្តវា។

គន្ថនិទ្ទេស

១. ជាភាសាខ្មែរ

១. ក្រុមអ្នកនិពន្ធ ៖ ***គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២*** កម្រិតខ្ពស់ បោះពុម្ពផ្សាយដោយគ្រឹះស្ថានបោះពុម្ពនិងចែកផ្សាយនៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១៤។

២. ម៉ែន សុគន្ធ ៖ ***វិភាគចំនួនពិត*** ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ភ្នំពេញ ឆ្នាំ១៩៩៩។

៣. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ៖ ***អាំងតេក្រាលមិនកំណត់*** ភ្នំពេញ ឆ្នាំ១៩៩៧។

៤. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ៖ ***អាំងតេក្រាលកំណត់*** ភ្នំពេញ ឆ្នាំ១៩៩៩។

៥. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា និង អេវ៉ាន អាស្លី ៖ ***គណិតវិទ្យា ២*** ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០០០។

៦. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា ៖ ***សិក្សាប្រភេទអាំងតេក្រាលមួយចំនួនក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រ*** រាជបណ្ឌិត្យសភាកម្ពុជា ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១៦។

៧. លឹម ផល្គុន ៖ ***គណិតវិទ្យាសម្រាប់វិស្វកម្ម*** វិទ្យាស្ថានពហុបច្ចេកទេសខេត្តបាត់ដំបង ខេត្តបាត់ដំបង ឆ្នាំ២០១៣។

៨. សួន សូវ៉ាន់ ៖ ***វិភាគចំនួនពិត ភាគ១*** ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០០៧។

៩. សួន សូវ៉ាន់ ៖ ***វិភាគចំនួនពិត ភាគ២*** ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០០៤។

១០. សឿន សម្បត្តិ ៖ ***គណិតវិទ្យា*** សាកលវិទ្យាល័យអន្តរជាតិ ភ្នំពេញ ឆ្នាំ២០១០។

២. ជាភាសាបរទេស

1. Herbert Bristol Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, New York, Macmillan Company, Third Edition, 1957.
2. http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/improper.2/
3. http://authors.library.caltech.edu/25036/4/Calc2_Chapter7w.pdf
4. https://cambomaths.files.wordpress.com/2010/03/1300_math_formulas.pdf
5. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_integrals_of_exponential_functions

6. http://galileo.phys.virginia.edu/classes/152.mf1i.spring02/ExpIntegrals.pdf
7. http://homepage.ntu.edu.tw/~wttsai/MathModel/Mathematical%20Formula%20Hand book.pdf
8. http://icdst.org/pdfs/files/6ff429701234e96fadaab5805e8f9e42.pdf
9. http://integral-table.com/downloads/single-page-integral-table.pdf
10. http://is.muni.cz/el/1431/podzim2014/F5170/um/integrals.pdf
11. http://pages.uoregon.edu/anderson/math241/Lecture6.pdf
12. http://ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math103/site2010/keshet.notes/Chapter9.pdf
13. http://www.cengage.com/resource_uploads/downloads/1133109489_499145.pdf
14. http://www.math.northwestern.edu/~mlerma/courses/math214-2-04f/notes/c2-logist.pdf
15. https://www.math.ucdavis.edu/~thomases/W11_16C1_lec_1_10_11.pdf
16. http://www.math.umd.edu/~tjp/131%2011.1-2%20supplement%20logistic%20 growth.pdf
17. https://www.rit.edu/studentaffairs/asc/sites/rit.edu.studentaffairs.asc/files/docs/ services /resources/handouts/C8_VolumesbyIntegration_BP_9_22_14.pdf
18. http://www.sosmath.com/tables/integral/integ27/integ27.html
19. https://www.whitman.edu/mathematics/calculus/calculus_09_Applications_of_ Integration.pdf
20. http://www2.clarku.edu/~djoyce/ma121/logistic.pdf
21. http://www2.ee.ufpe.br/codec/colecao%20schaum's%20(mathematical%20%20-%20 formulas%20and%20tables).pdf
22. Karl Smith, ***Student Mathematics Handbook and Integral Table for Calculus***, United States of America, Prentice-Hall, Inc., Third Edition, 2002.
23. https://www.facebook.com/photo?fbid=2182412998728192&set=a.1380543128915187

សកម្មភាពធ្វើបទបង្ហាញរូបមន្តនិងការគាំទ្រ

$$\int \frac{dx}{(p+q\,a^{\alpha x})^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{n\alpha q^n \ln a} \cdot \dfrac{1}{a^{n\alpha x}} + c & \text{if } \; p=0\,,\, q\neq 0 \\[2ex] \dfrac{x}{p^n} - \dfrac{1}{\alpha\, p^n \ln a} \ln\left| p+q\,a^{\alpha x} \right| + \dfrac{1}{\alpha \ln a} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k\, p^{n-k}\,(p+q\,a^{\alpha x})^k} + c & \text{if } \; p\neq 0 \end{cases}$$